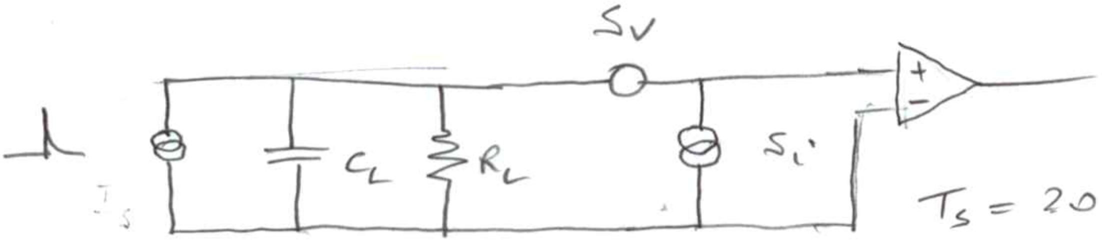
01/02/2010

P1/1

P1 domanda (a)



$T_s = 20\,ms$

$S_v = 10\,nV\,Hz^{-1/2}$

$S_i = 0{,}02\,pA\,Hz^{-1/2}$

$R_L = 100\,M\Omega$

$C_L = 4\,pF$

$$i_s = \frac{Q_s}{T_s} e^{-t/T_s}\, 1(t)$$

$$T_L = R_L C_L = 400\,\mu s$$

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_L C_L} \sim 400\,Hz$$

Rumore totale di tensione

$$S_{vT} = \frac{S_i R_L^2}{1+\omega^2 R_L^2 C_L^2} + S_v$$

ma $S_i^{1/2} R_L = 2\,\mu V\,Hz^{-1/2} >> S_v$

quindi i due termini sono eguali a $\omega_{nc} >> \omega_L = \frac{1}{R_L C_L}$

quindi ω_{nc} si può valutare bene approssimando

$$\frac{S_i R_L^2}{1+\omega^2 R_L^2 C_L^2} \simeq \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2}$$

quindi

$$\omega_{nc} = \frac{S_i^{1/2}}{S_v^{1/2} C_L} = 5 \cdot 10^5\,rad/s$$

$$T_{nc} = \frac{S_v^{1/2} C_L}{S_i^{1/2}} = 2\,\mu s$$

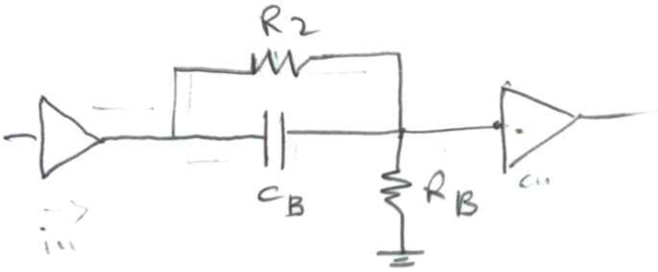
Lo spettro di rumore totale S_{vT} dunque ha un polo a $\omega_L = \frac{1}{T_L}$ e uno zero a $\omega_{nc} = \frac{1}{T_{nc}}$

ampiezza $S_i^{1/2} R_L = 2\,\mu V\,Hz^{-1/2}$ per $\omega << \omega_L$

ampiezza $S_v = 10\,nV\,Hz^{-1/2}$ per $\omega >> \omega_{nc}$

Pertanto il filtro "sbiancante" deve avere

- uno zero a $\omega_L = \frac{1}{T_L}$
- un polo a $\omega_{nc} = \frac{1}{T_{nc}} \gg \frac{1}{T_L} = \omega_L$



$$H_B = \frac{R_B}{R_B + R_2} \frac{1 + j\omega R_2 C_B}{1 + j\omega C_B R_B // R_2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{zero} & \omega_z = \frac{1}{R_2 C_B} \\ \text{polo} & \omega_p = \frac{1}{C_B R_2 // R_B} \end{array}\right\} \quad \frac{\omega_z}{\omega_p} = \frac{R_B}{R_B + R_2} = \frac{T_{nc}}{T_L}$$

$$\frac{\omega_z}{\omega_p} = \frac{\omega_L}{\omega_{nc}} = \frac{T_{nc}}{T_L} = \frac{1}{200}$$

$$\frac{R_B}{R_B + R_2} = \frac{1}{200} \longrightarrow R_2 \simeq 200\, R_B$$

N.B. Si può anche usare l'approssimazione
$$\omega_z \simeq 0 \longrightarrow T_L \to \infty$$
e quindi $R_B \to \infty$, cioè usare come filtro sbiancante un semplice differenziatore. Occorre però poi usare la stessa approssimazione esaminando quello che accade al segnale.

Lo spettro sbiancato ha ampiezza
$S_B = S_V$ unilatero (bilatero $S_B' = \frac{S_B}{2}$)

01/02/2010

P1 domanda (b)

- Indicando l'impulso a valle del filtro sbiancante con

$v_B(t) = U_B\, b(t)$ $\quad$ U_B = area dell'impulso

$b(t)$ normalizzato $\int b\,dt = 1$

- Il filtraggio con funzione peso $W(t)$ porta a

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{U_B^2\, K_{bw}^2(0)}{S_B'\, K_{ww}(0)}$$

(K_{bw} = correlaz. tra b e w)

(K_{ww} = autocorrel. di w)

- L'ottimo si ottiene con il filtro adattato $w(t) \propto b(t)$

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{opt} = \frac{U_B^2}{S_B'} K_{bb}(0) = 2\frac{U_B^2}{S_B} K_{bb}(0)$$

$$U_{B\,min} = S_B^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2\, K_{bb}(0)}}$$

- Occorre trovare $b(t)$ e valutare $K_{bb}(0)$.

- Se si potesse approssimare il segnale a $\delta(t)$

$$i_s = Q_s\, \delta(t)$$

tenuto conto della cancellazione polo-zero prodotta dal filtro sbiancante si avrebbe

$$v_B(t) = \frac{Q_s}{C_L} e^{-t/T_{nc}}$$

pertanto:

$$U_B = \frac{Q_s}{C_L} T_{nc} \qquad b(t) = \frac{1}{T_{nc}} e^{-t/T_{nc}}$$

$$Q_{s\,min} = \frac{C_L}{T_{nc}} U_{B\,min} \qquad K_{bb}(0) = \frac{1}{2T_{nc}}$$

$$Q_{smin} = \frac{C_L}{T_{nc}} S_B^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2 K_{bb}(0)}} = \frac{C_L S_B^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}} = 2,8 \cdot 10^{-17}\ C$$

$$N_{smin} = \frac{Q_{smin}}{q} = \frac{2,8 \cdot 10^{-17}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 177 \text{ elettroni}$$

– Dato che il segnale all'ingresso è invece esponenziale

$$i_s = Q_s \frac{1}{T_s} e^{-t/T_s}$$

il segnale sbiancato ha forma che differisce da $v_B(t)$ per l'effetto di un filtraggio passabasso con cost. di tempo T_s

$$v'_{BF} = v_B * \frac{1}{T_s} e^{-t/T_s}$$

– Quindi v_{BF} ha la stessa area di v_B, ma contiene <u>due</u> componenti esponenziali con cost T_{nc} e T_s

$$b_F(t) = \frac{1}{T_{nc} - T_s} \left(e^{-t/T_{nc}} - e^{-t/T_s} \right)$$

– Tenendo conto che in questo caso $T_s = \frac{T_{nc}}{100}$ si vede che l'effetto di T_s modifica molto poco $b_F(t)$ rispetto a $b(t)$. Il fronte di salita di circa $2,5\, T_s$ porta una diminuzione lieve ($\sim 2\%$) dell'ampiezza massima di $b_F(t)$ e ancora più lieve di $K_{bb}(0)$ – Si può trascurare l'effetto di T_s nel valutare Q_{smin} in questo caso.

P1 domande (c)

Utilizzando invece del filtro adattato un filtro integratore con $T_F = T_{nc}$, si ottiene segnale

$$u(t) = v_B(t) * \frac{1}{T_{nc}} e^{-t/T_{nc}}$$

$$= \frac{Q_S}{C_L} T_{nc} \frac{t}{T_{nc}^2} e^{-t/T_{nc}}$$

con valore di picco

$$u(T_{nc}) = \frac{Q_S}{C_L} \frac{1}{e}$$

e rumore in uscita limitato dalla banda del filtro

$$\overline{n_U^2} = S_B \frac{1}{4T_{nc}}$$

Quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_F = \frac{Q_S}{C_L} \frac{2}{e} \frac{\sqrt{T_{nc}}}{S_B^{1/2}}$$

$$Q_{S\,min} = \frac{C_L S_B^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}} \frac{e}{2} = 3{,}8 \cdot 10^{-17}\,C$$

$$N_{S\,min} = \frac{Q_{S\,min}}{q} = 236 \text{ elettroni}$$

Valori che risultano peggiori dell'ottimo per il fattore $\frac{e}{2} = 1{,}36$, cioè del 36%.

P1 domanda (d)

Con un valore di T_S confrontabile con T_{nc} si ha un effetto non trascurabile e occorre considerare la forma

$$b_F(t) = \frac{1}{T_{nc} - T_S}\left(e^{-t/T_{nc}} - e^{-t/T_S}\right)$$

per cui si ha

$$K_{bb}(0) = \int_0^\infty b_F^2(t)\,dt = \frac{1}{(T_{nc} - T_S)^2}\left[\frac{T_{nc}}{2} + \frac{T_S}{2} - 2\frac{T_{nc}T_S}{T_{nc}+T_S}\right] =$$

ovvero indicando con $\gamma = \frac{T_S}{T_{nc}}$

$$K_{bb}(0) = \frac{1}{2T_{nc}}\frac{1}{(1-\gamma)^2}\left[1 + \gamma - 4\frac{\gamma}{1+\gamma}\right] =$$

$$= \frac{1}{2T_{nc}}\frac{1}{1+\gamma}$$

Pertanto si ha ora

$$Q_{s\,min} = \frac{C_L}{T_{nc}} S_B^{1/2}\sqrt{\frac{1}{2K_{bb}(0)}} =$$

$$= \frac{C_L S_B^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}\sqrt{1+\gamma}$$

quindi con $T_S = \frac{1}{2}T_{nc}$ si ha $\gamma = 0{,}5$ e

$$Q_{s\,min} = \frac{C_L S_B^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}\sqrt{1{,}5} = 3{,}5 \cdot 10^{-17}\ C$$

$$N_{s\,min} = \frac{Q_{s\,min}}{q} = 213 \text{ elettroni}$$

Il fattore di peggioramento rispetto al caso (b) è

$$\sqrt{1+\gamma} = \sqrt{\frac{T_S + T_{nc}}{T_{nc}}} = 1{,}225$$