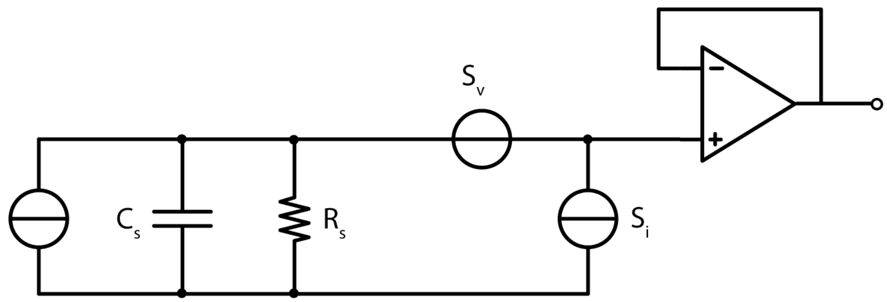


Fig. 1

C_s = 50 pF , R_s = 100 MΩ
$S_V^{1/2}$ = 10 nV/Hz$^{1/2}$ (unilatera)
$S_i^{1/2}$ = 0,1 pA/Hz$^{1/2}$ (unilatera; include anche il contributo di R_s) con componente 1/*f* avente f_c = 10 kHz
f_{pa} = 5 MHz

Problema 1

$C_S = 50pF \qquad R_S = 100M\Omega$

$S_V^{1/2} = 10nV / Hz^{1/2}$

Componente rumore bianco $S_i^{1/2} = 0{,}1pA / Hz^{1/2}$ e componente *1/f* con $f_c = 10KHz$

$f_{Pc} = 5MHz$

NB il rumore della R_s è già conteggiato in $S_i^{1/2}$.

a) Misura effettuata all'uscita del preamp senza altro filtraggio del rumore

Rumore

- S_i è filtrato da integratore $R_S C_S$ = 5ms; banda $\frac{1}{2\pi R_S C_S} = 32Hz$, banda di rumore $f_{Sn} = \frac{1}{4R_S C_S} = 50Hz$
- S_V è filtrato solo da banda del preamp $f_{npa} = \frac{\pi}{2} f_{pa} \simeq 8MHz$
- S_i filtrato dall'integratore $R_s C_s$
  - $\left(\overline{v_{ni}^2}\right)^{1/2} = S_i^{1/2} R_S f_{Sn}^{1/2} = 0{,}1 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{50} = 70\mu V$
  - $\left(\overline{v_{nv}^2}\right) = S_V^{1/2} f_{npa}^{1/2} = 10 \cdot 10^{-9} \cdot \left(8 \cdot 10^6\right)^{1/2} = 28\mu V$
  - $v_n = \sqrt{\overline{v_{ni}^2} + \overline{v_{nv}^2}} = 75\mu V$

Segnale

$$V_S = \frac{Q_S}{C_S}$$

$$V_{S\min} = v_n$$

$$Q_{S\min} = C_S V_{S\min} = 50 \cdot 10^{-12} \cdot 75 \cdot 10^{-6} = 3,75 \cdot 10^{-15} C$$

$$N_{Q\min} = \frac{Q_{S\min}}{q} = \frac{3,75 \cdot 10^{-15}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 23000 elettroni$$

b) Misura con filtraggio ottimo

b1) Ragionando con l'approssimazione $R_s \to \infty$

- Segnale $y_{R_S C_S}(t) = \frac{Q_S}{C_S} 1(t) \to$ Laplace $\to Y_{R_S C_S}(s) = \frac{Q_S}{sC_S}$
- rumore in tensione
  - $S_T = \frac{S_i}{\omega^2 C_S^2} + S_V$

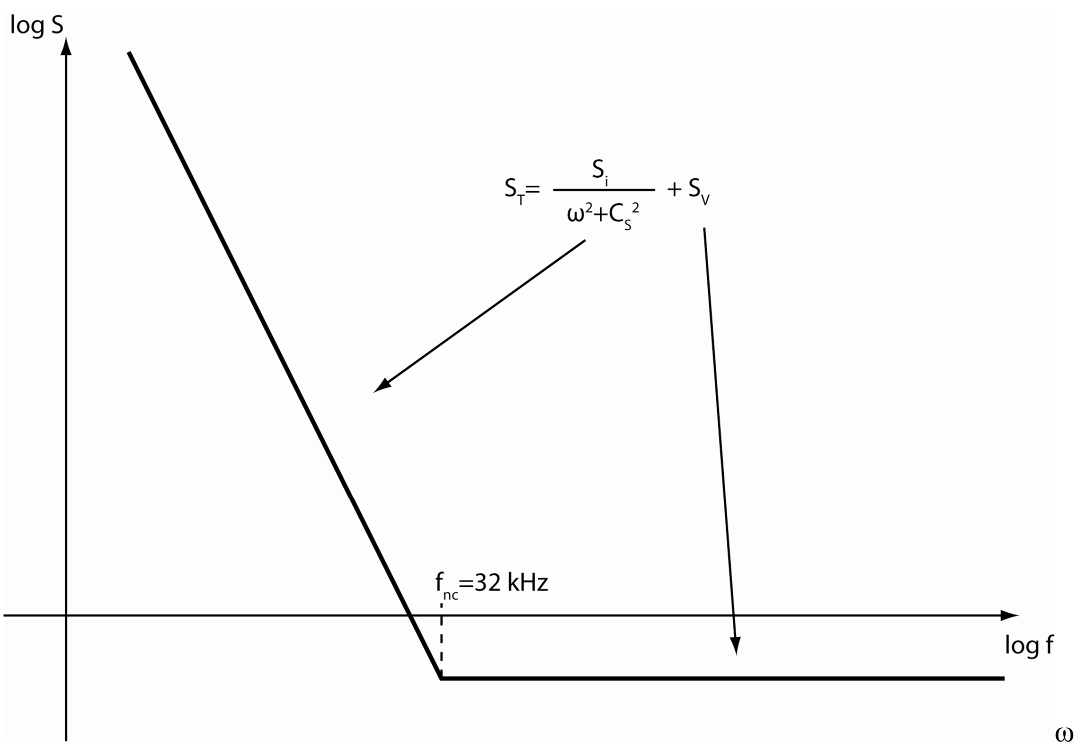


Diagramma di Bode del rumore con l'approssimazione $R_s \to \infty$.
La f_{nc} è definita dalla eguaglianza delle due componenti costante e $1/\omega^2$

$$\tau_{nc} = \frac{1}{\omega_{nc}} = \frac{C_S S_V^{1/2}}{S_i^{1/2}} = 5 \mu s$$

- Filtro sbiancante
  - $\left|F_B\right|^2 = \dfrac{\omega^2 \tau_{nc}^2}{1+\omega^2 \tau_{nc}^2}$

    ha un polo a $\omega=\omega_{nc}$ e uno zero a $\omega=0$
    è un semplice differenziatore *CR* con $T_B=R_B C_B=T_{nc}$
- Dopo il filtro sbiancante:
  - il rumore è bianco S_V
  - il filtro con il suo zero cancella il polo a $\omega=0$ del segnale e lo sostituisce con il suo polo a ω_{nc}. Il segnale è ora un esponenziale semplice $y_B(t) = \dfrac{Q_S}{C_S} 1(t) e^{-t/T_{nc}}$

b2) Cosa cambia se ora si tiene in conto R_S finita?

Segnale in uscita dal preamp.

$y_{preamp}(t) = \dfrac{Q_S}{C_S} 1(t) e^{-t/R_S C_S}$ →Laplace→ $Y_{preamp}(s) = Q_S \dfrac{R_S}{1+sR_S C_S}$; polo a $\omega_S = \dfrac{1}{R_S C_S}$)

rumore in uscita dal preamp $S_T = S_i \dfrac{R_S^2}{1+\omega^2 R_S C_S} + S_V$

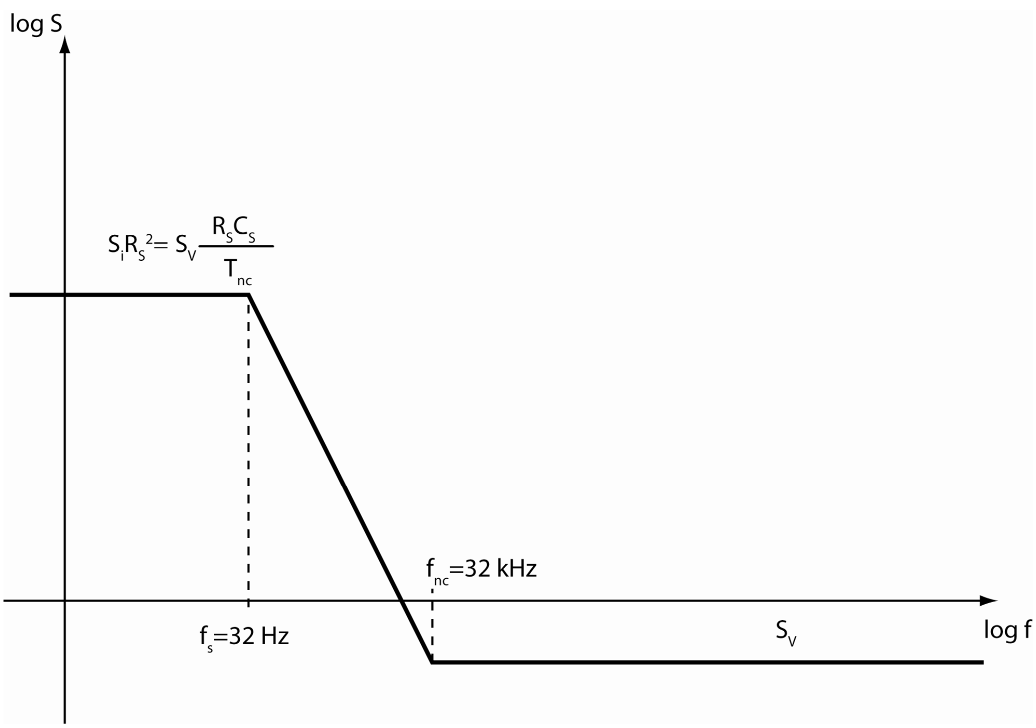
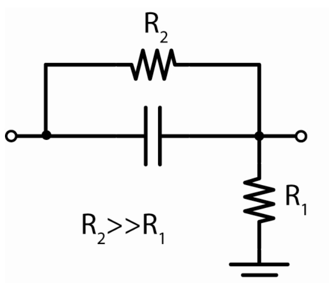


Diagramma (asintotico) di Bode del rumore con R_s finita.
La f_{nc} è definita dalla eguaglianza delle due componenti costante e $1/\omega^2$

Con:

$$\begin{cases} R_S C_S = 5ms \\ \dfrac{S_i R_S^2}{S_V} = \dfrac{R_S C_S}{T_{nc}} \end{cases}$$

Filtro sbiancante: il polo è ancora a $\omega = \omega_{nc}$, ma lo zero è a $\omega = \omega_S$ (e non piu' a $\omega=0$)
(schema circuitale con $R_2 >> R_1$)



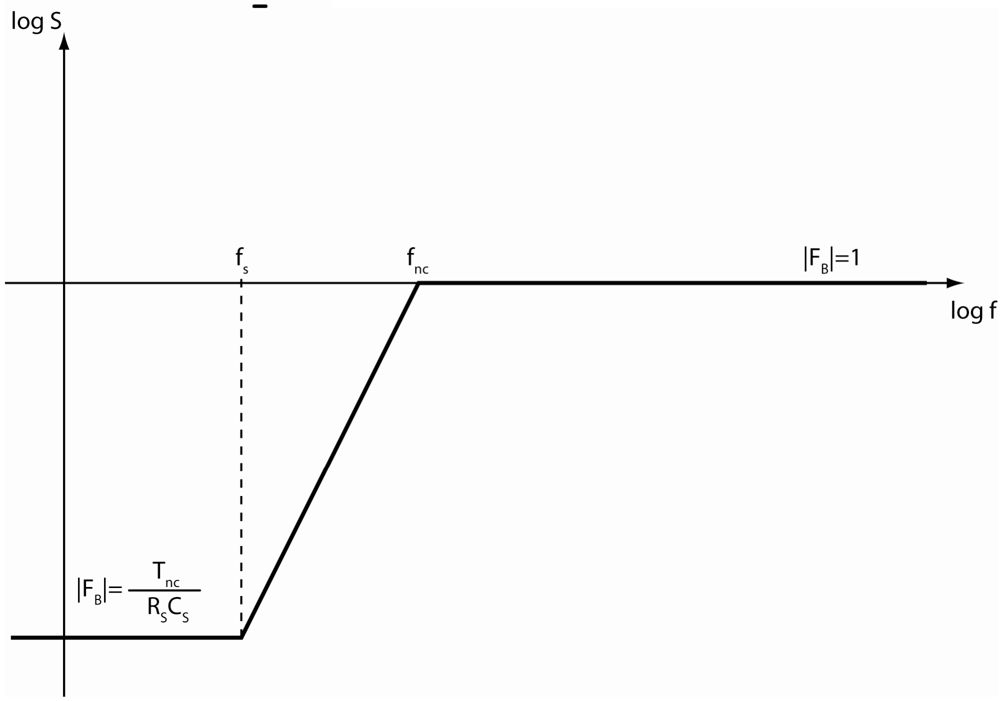


Diagramma (asintotico) di Bode del filtro sbiancante ricavato tenendo conto di R_s finita.

Azione del filtro sbiancante sul segnale:

- lo zero del filtro a f_s cancella il polo del segnale
- il polo del filtro a f_{nc} è imposto al segnale

Quindi in uscita

- segnale $y_B(t) = \dfrac{Q}{C_S} 1(t) e^{-t/Tnc}$ come nell'approssimazione $R_s \to \infty$
- rumore $S_B = S_V$ come nell'approssimazione $R_s \to \infty$

<u>Non</u> cambia il risultato dello sbiancamento!

b3) Filtro adattato

Con rumore bianco, la funzione peso ottima ha forma uguale al segnale

$$w(\tau)=\frac{1}{T_{nc}}e^{-\tau/Tnc}$$

Rumore in uscita

$$\overline{n_u^2}=S_B(bilatera)k_{ww}(0)=\frac{S_V(unilatera)}{2}\frac{1}{2T_{nc}}$$

(NB: questo filtro adattato ha la stessa banda di rumore di un integratore semplice con $RC = T_{nC}$)

$$\left(\overline{n_u^2}\right)^{1/2}=\frac{S_v^{1/2}}{2\sqrt{T_{nc}}}=\frac{10\cdot 10^{-9}}{2\sqrt{5\cdot 10^{-6}}}=2,2\mu V$$

Segnale in uscita misurato a $t = T_m$

$$y_u(T_m)=\int_0^{T_m}y_B(\tau)w(\tau)d\tau=\int_0^{T_m}\frac{Q_S}{C_S}e^{-\tau/T_{nc}}\frac{1}{T_{nc}}e^{-\tau/T_{nc}}d\tau=\frac{Q_S}{2C_S}\left(1-e^{-2T_m/T_{nc}}\right)$$

per $T_m > 2,3\ T_{nC}$

$$y_u\simeq s_{opt}=\frac{Q_S}{2C_S}$$

$$Q_{s\min,opt}=2C_S\left(\overline{n_V^2}\right)^{1/2}=2\cdot 50\cdot 10^{-12}\cdot 2,2\cdot 10^{-6}=2,2\cdot 10^{-16}C$$

in elettroni

$$N_{\min,opt}=\frac{Q_{s\min,opt}}{q}=\frac{2,2\cdot 10^{-16}}{1,6\cdot 10^{-19}}=1375el$$

c) Misura con un filtraggio semplice in luogo del filtro adattato

C1) filtro a parametri costanti: integratore *RC*

Rumore

con $RC = T_{nc}$ la banda di rumore $\frac{1}{4T_{nc}}$ è uguale a quella del filtro adattato, quindi il rumore in uscita è uguale a quello del filtro adattato

$$\overline{n_u^2}=\frac{S_u^{1/2}}{2T_{nc}^{1/2}}=2,2\mu V$$

Segnale

Segnale $\frac{Q_S}{C_S}1(t)e^{-t/T_{nc}}$ filtrato da $RC = T_{nc}$

cioè

$$y_u(t) = \frac{Q_S}{C_S} 1(t) \frac{t}{T_{nc}} e^{-t/T_{nc}}$$

massimo a $t = T_{nc}$

$$\frac{Q_S}{C_S} 1(t) e^{-1} = \frac{1}{2,72} \frac{Q_S}{C_S}$$

Rispetto a quello del filtro adattato, il segnale in uscita è più piccolo del fattore

$$\frac{e}{2} = \frac{2,72}{2} = 1,36$$

Quindi la carica minima misurabile è più grande per questo fattore

$$N_{\min,RC} = 1,36 \cdot \frac{Q_{s\min,opt}}{q} = 1,36 \cdot 1,375 = 1870 el$$

C2) filtro a parametri variabili: gated integrator

Possiamo usare un gated integrator e avere rumore in uscita uguale a quello del filtro adattato (e quindi anche a quello del filtro integratore RC con RC=T_{nc}) se lo dimensioniamo in modo da avere

- uguale banda di rumore $T_G = 2T_{nc}$
- uguale guadagno in continua unitario

e quindi funzione peso

- $w(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_G} \; per \; 0 \le t \le T_G \\ 0 \;\; altrove \end{cases}$

Segnale in uscita

$$y_u(t) = \int_0^{T_G} \frac{Q_S}{C_S} e^{-\tau/T_{nc}} \frac{1}{T_G} d\tau = \frac{Q_S}{C_S} \frac{T_{nc}}{T_G} \left(1 - e^{-T_G/T_{nc}}\right)$$

quindi con $T_G=2T_{nc}$

$$\frac{Q_S}{2C_S}\left(1 - e^{-2}\right) = \frac{Q_S}{2C_S} \cdot 0,86 = \frac{Q_S}{2C_S} \cdot \frac{1}{1,16}$$

rispetto a quello del filtro adattato, il segnale è più piccolo del fattore 1,16 e quindi la carica minima misurabile cresce di questo fattore:

$$Q_{S\min,GI} = 1,16 \cdot \frac{Q_{S\min,opt}}{q} = 1,16 \cdot 1375 = 1590 el$$

d) Effetto del rumore 1/f

La componente *1/f* è nel rumore di corrente

$$S_{iT} = S_i + \frac{S_i f_c}{f}$$

Il rumore di corrente passa attraverso

1. Filtro $R_S C_S$: è un filtro passabasso (polo approssimato a $f = 0$; polo corretto a $f = ½\pi R_S C_S$)
2. Filtro sbiancante: cancella con lo zero il polo di $R_S C_S$ e vi sostituisce il suo polo a $f = f_{nc}$
3. Filtro adattato: è un altro filtro passabasso

In conclusione: S_{iT} non subisce alcun filtraggio passa-alto!

Verifichiamo questa conclusione facendo il calcolo dell'effetto dovuto al rumore di corrente (nella approssimazione in cui si considera $R_S \rightarrow \infty$, cioè trattando la cella $R_S C_S$ come un integratore ideale)

- dopo la cella $R_S C_S$ il rumore di corrente produce $S_{R_S C_S} = \dfrac{S_{iT}}{\omega^2 C_S^2}$
- e dopo il filtro sbiancante produce
  - $S_{SB} = \dfrac{S_{iT}}{\omega^2 C_S^2} \cdot \dfrac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2} = S_{iT} R_S^2 \cdot \dfrac{T_{nc}^2}{(R_S C_S)^2} \cdot \dfrac{1}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$

  tenendo ora conto che $\dfrac{S_V}{S_i R_S^2} = \left(\dfrac{T_{nc}}{R_S C_S}\right)^2$, si vede che in uscita dal filtro sbiancante la componente di rumore di corrente bianca S_i produce un rumore

  $$S_V \frac{1}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

  mentre la componente *1/f* di rumore di corrente $S_i f_C / f$ produce un rumore

  $$S_i \frac{\omega_C}{\omega} R_S^2 \cdot \frac{T_{nc}^2}{(R_S C_S)^2} \cdot \frac{1}{1+\omega^2 T_{nc}^2} = \frac{\omega_C}{\omega} S_V \frac{1}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

  cioè un rumore con spettro *1/f* filtrato da un filtro passabasso con polo a $½\pi T_{nc}$

Il filtro adattato che segue aggiunge semplicemente un altro filtraggio passabasso con taglio ancora a $f = f_{nc}$.

Valutiamo allora l'effetto della *1/f* filtrata da un taglio passabasso a $f_S = f_{nc}$ e da un taglio passa-alto moderato, cioè un taglio a frequenza f_i molto bassa, come ad esempio si puo' ottenere mediante un azzeramento periodico della linea di base ogni ≈ 1000 s.

Dunque con $f_i \approx 10^{-3}\ Hz$ e

$$\begin{cases} S_V^{1/2} = 10\, nV / Hz^{1/2} \\ f_S = f_{nc} = 32 KHz \\ f_i = 10^{-3} Hz \\ f_c = 10 KHz \end{cases}$$

il contributo di rumore in uscita dovuto alla componente 1/f valutato con la solita approssimazione di taglio netto alle frequenze f_i e f_s risulta essere

$$\left(\overline{v_{u,1/f}^2}\right)^{1/2} = \left(\int_{f_i}^{f_S} S_V \frac{f_C}{f} df\right)^{1/2} = S_V^{1/2} f_C^{1/2} \left[\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)\right]^{1/2} = 1\mu V \cdot \left[\ln\left(3,2\cdot 10^7\right)\right]^{1/2} = 4,2\mu V$$

Questo contributo è quasi il doppio di quanto calcolato con filtro ottimo senza rumore *1/f*.

Per ridurre il contributo della *1/f* occorre un filtraggio passa-alto ben più efficace, cioè occorre alzare la frequenza f_i del taglio passaalto. Attenzione però a non alzare tanto f_i da ridurre molto il segnale, che significherebbe degradare l'effetto di filtraggio delle altre componenti dello spettro di rumore. Pertanto, visto che il segnale in uscita ha banda $\approx f_{nc}$, possiamo ad esempio utilizzare un taglio passaalto con $f_i = f_{nc}/100 = 320\ Hz$.

In questo modo

$$\left(\overline{v_{u,1/f}^2}\right)^{1/2} = S_V^{1/2} f_c^{1/2} \left[\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)\right]^{1/2} = 1\mu V \cdot \left[\ln\left(100\right)\right]^{1/2} = 2,14\mu V$$

Il contributo della componente *1/f* viene così dimezzato rispetto al caso precedente. Esso rimane però significativo, dato che è circa eguale al rumore prodotto delle altre componenti con filtraggio per esse ottimizzato (vedere al paragrafo b3).

Per ridurre ulteriormente il contributo della componente *1/f* occorrere studiare filtraggi più sofisticati, ma questo va al di là di quanto richiesto nell'enunciato del problema.