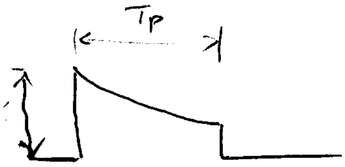
P1 domanda (a)



- segnale $x(t) = P e^{-t/T_D}$
- area del segnale $A = P\, T_D \left(1 - e^{-T_P/T_D}\right)$
- segnale ad area normalizzata

$$b(t) = \frac{x(t)}{A} = \frac{1}{T_D\left(1-e^{-T_P/T_D}\right)}\, e^{-t/T_D} \qquad 0 < t < T_P$$

- f. peso ottima normalizzata (con rumore bianco)

$$w(t) = b(t)$$

- $K_{ww}(0) = \int_0^{T_P} w^2\, dt = \frac{1}{2\, T_D}\, \frac{1 - e^{-2\, T_P/T_D}}{\left(1 - e^{-T_P/T_D}\right)^2}$
- rumore in uscita (N.B. S_V è bilatera qui)

$$\overline{n_u^2} = S_V\, K_{ww}(0) = \frac{S_V}{2\, T_D}\, \frac{1 - e^{-2\, T_P/T_D}}{\left(1 - e^{-T_P/T_D}\right)^2}$$

- segnale in uscita

$$u_s = \int_0^{T_P} x(t)\, w(t)\, dt = \frac{P}{2}\, \frac{1 - e^{-2\, T_P/T_D}}{1 - e^{-T_P/T_D}}$$

- $\left(\frac{S}{N}\right)_u = \frac{u_s}{\sqrt{\overline{n_u^2}}} = \frac{P}{S_V^{1/2}} \sqrt{\frac{T_D}{2}}\, \sqrt{1 - e^{-2\, T_P/T_D}}$

- $P_{min} = S_V^{1/2} \sqrt{\frac{2}{T_D}}\, \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\, T_P/T_D}}}$

con $T_P = T_D$

$$P_{min} = S_V^{1/2} \sqrt{\frac{2}{T_D}}\, \sqrt{\frac{e^2}{e^2 - 1}} = 1{,}07\, S_V^{1/2} \sqrt{\frac{2}{T_D}}$$

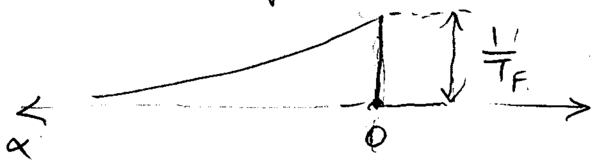
Dati $S_V^{1/2} = 10\, nV\, Hz^{-1/2}$ bilatera

$T_D = 10\, \mu s$

$$P_{min} = 1{,}07 \cdot 4{,}47\, \mu V = 4{,}8\, \mu V$$

P1 domanda (b)

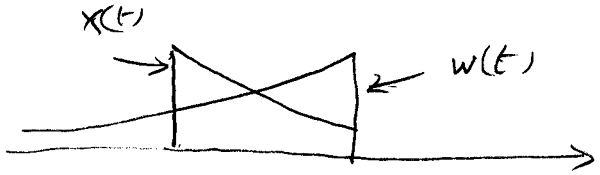
Filtro integratore $RC = T_F$



$$W(\alpha) = \frac{1}{T_F} e^{-\alpha/T_F}$$

- $K_{ww}(0) = \frac{1}{2T_F} = \frac{1}{2T_D}$ con $T_F = T_D$
- rumore $\overline{n_v^2} = S_v^{1/2} K_{ww}(0) = S_v \frac{1}{2T_F}$
- segnale in uscita: con $T_F = T_D$ raggiunge il massimo a $t = T_D$

$$: u_s = P \frac{T_p}{T_D} e^{-T_p/T_D} = \frac{P}{e} \quad \text{con } T_p = T_D$$



- $\frac{S}{N} = \frac{P}{e} \frac{1}{S_v^{1/2}} \sqrt{2T_D} = \frac{P}{S_v^{1/2}} \sqrt{\frac{T_D}{2}} \frac{2}{e}$
- $P_{min} = S_v^{1/2} \sqrt{\frac{2}{T_D}} \frac{e}{2} = 1{,}36\, S_v^{1/2} \sqrt{\frac{2}{T_D}}$

Con i dati: $S_v^{1/2} = 10\,nV\,Hz^{-1/2}$

$T_D = 10\,\mu s$

$$P_{min} = 1{,}36 \cdot 4{,}47\,\mu V = 6{,}1\,\mu V$$

rispetto all'ottimo è maggiore del fattore

$$\frac{1{,}36}{1.07} = 1{,}27$$

P1 domanda (c)

Gated integrator normalizzato ad area 1

$$w = \frac{1}{T_G} \quad 0<t<T_G$$

con $T_G = T_P = T_D$

$$w = \frac{1}{T_D} \quad 0<t<T_P$$

$$K_{ww}(0) = \frac{1}{T_D}$$

- rumore

$$\overline{n_v^2} = S_v\, K_{ww}(0) = S_v \frac{1}{T_D}$$

- segnale

$$n_s = \int_0^{T_P} x(t)\, w(t)\, dt = P\left(1 - e^{-T_P/T_D}\right)$$

- $$\frac{S}{N} = \frac{P\left(1-e^{-T_P/T_D}\right)}{S_v^{1/2}\frac{1}{\sqrt{T_D}}} = \frac{P}{S_v^{1/2}}\sqrt{\frac{T_D}{2}}\cdot\sqrt{2}\left(1-e^{-T_P/T_D}\right)$$

$$P_{min} = S_v^{1/2}\sqrt{\frac{2}{T_D}}\;\frac{1}{\sqrt{2}\left(1-e^{-T_P/T_D}\right)} =$$

$$= S_v^{1/2}\sqrt{\frac{2}{T_D}}\;\frac{1}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)} =$$

$$= S_v^{1/2}\sqrt{\frac{2}{T_D}}\cdot 1{,}12 =$$

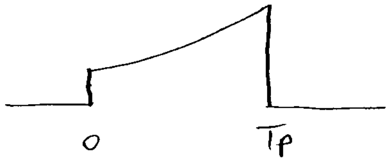
$$= 4{,}47\,\mu V \cdot 1{,}12 = 5{,}01\,\mu V$$

rispetto all'ottimo vi è un fattore

$$\frac{1{,}12}{1{,}07} = 1{,}05$$

P1 domanda (d)

Con segnale impulso "girato"



$$x(t) = P\, e^{-(T_P - t)/T_D} \quad \text{in } 0 < t < T_P$$

(d1) Filtro ottimo: non cambiano i calcoli e il risultato. Non cambia né il rumore né il segnale in uscita.

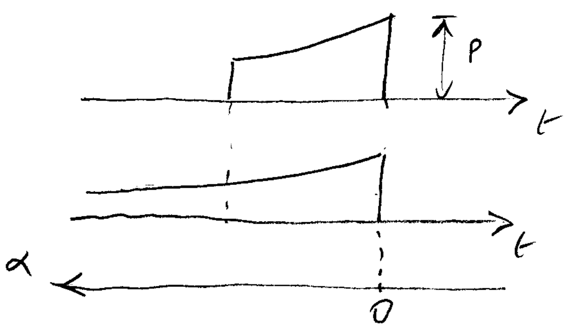
(d3) Gated integrator: non cambiano i calcoli e il risultato. Non cambia né il rumore né il segnale in uscita.

(d2) Filtro $RC = T_F = T_D$

- Il rumore non cambia

$$\overline{n_v^2} = S_v \frac{1}{2T_D}$$

- Il risultato per il segnale cambia notevolmente, come intuibile perché ora la funzione peso $w(t)$ del filtro RC è molto più "simile" al segnale e perciò più vicina all'ottimo.



$$u_s = \int_0^{T_P} x(t)\, w(t)\, dt$$

Per comodità cambiamo variabile

$$\alpha = T_P - t$$

$$u_s = \int_0^{T_P} x(\alpha)\, w(\alpha)\, d\alpha$$

$$u_S = \int_0^{T_P} x(\alpha)\, w(\alpha)\, d\alpha = \frac{P}{2}\left(1 - e^{-2T_P/T_D}\right)$$

$$\frac{S}{N} = \frac{P}{S_V^{1/2}} \sqrt{\frac{T_D}{2}} \cdot \left(1 - e^{-2T_P/T_D}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{P}{S_V^{1/2}} \sqrt{\frac{T_D}{2}} \sqrt{1 - e^{-2T_P/T_D}}}_{\text{ottimo}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - e^{-2T_P/T_D}}}_{\sqrt{\frac{e^2-1}{e^2}} = \frac{1}{1{,}075}}$$

$$P_{min} = S_V^{1/2}\sqrt{\frac{2}{T_D}} \; \frac{1}{1 - e^{-2T_P/T_D}} =$$

$$= S_V^{1/2}\sqrt{\frac{2}{T_D}} \; \frac{e^2}{e^2 - 1} =$$

$$= 4{,}47 \cdot 1{,}156 = 5{,}2\ \mu V$$

rispetto all'ottimo vi è un fattore

$$\frac{1.156}{1.07} = 1{,}08$$