PROBLEMA 1

Quadro dei dati

$T_P = 500$ ns durata del segnale

$S_n^{1/2} = 50\text{nV Hz}^{-1/2}$ densita' efficace unilatera del rumore

$1\text{pF} \le C \le 1$ nF valori utilizzabili per C_1 e C_2

$10\ \text{k}\Omega \le R \le 10\ \text{M}\Omega$ valori utilizzabili per R_1, R_2 e R_3

$\sqrt{\overline{v_{nm}^2}} = 2\mu V$ rumore del voltmetro elettronico di misura, riferito al suo ingresso

per domanda (b)

$f_c = 100$ kHz corner-frequency della componente 1/f del rumore

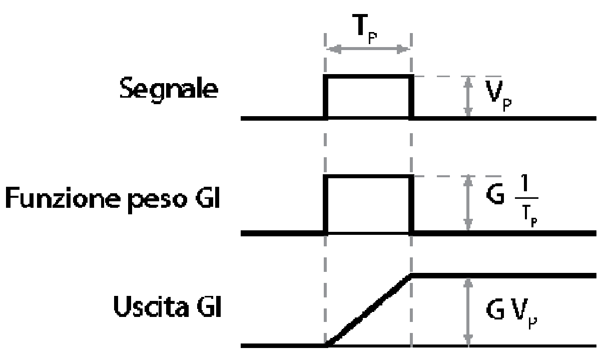
per domanda (c)

f_R frequenza di ripetizione degli impulsi variabile 1kHz $< f_R <$2 kHz, ovvero intervallo tra impulsi $T_R = 1/f_R$ variabile 1ms$> T_R >$ 0,5ms

(a) Misura su impulso singolo

Tipo di filtraggio

con rumore bianco: f.peso ottima = segnale = rettangolo, che è bene approssimta da filtraggio Gated Integrator (GI), che è bene realizzabile con i circuiti dati:



Ampiezza di segnale in uscita da filtro GI: $V_{P1} = G_1 V_P$ con G_1 = guadagno del filtro

Rumore filtrato in uscita: $\overline{v_{n1}^2} = S_n f_{nG} = \frac{1}{2} S_n k_{ww}(0) = G_1^{\,2} \frac{S_n}{2T_P}$

Rumore filtrato riferito all'ingresso $\overline{v_{n1i}^2} = \frac{v_{n1}^2}{G_1^{\,2}} = \frac{S_n}{2T_P}$

$$\sqrt{\overline{v_{n1i}^2}} = \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{2T_P}} = 50\mu V$$

Segnale minimo misurabile con GI $V_{Pm1} = \sqrt{\overline{v_{n1i}^2}} = 50\mu V$

Realizzazione del filtraggio GI con i circuiti dati

Occorre

1) sincronizzare la chiusura dello switch con la durata del segnale T_P e

2) avere costante di tempo di integrazione T_F molto piu' lunga di T_P , tipicamente $T_F = 100\ T_P = 50\mu s$. Ciò è possibile, dato che con i valori disponibili di R e C si può avere $10ns \leq T_F \leq 10ms$.

Filtro passivo A:

$T_F = R_1C_1 = 100\ T_P = 50\mu s$ realizzabile ad es. con $C_1 = 50$ pF e $R_1 = 1$ MΩ

dato che

$$G_1 = \frac{T_P}{T_F} = \frac{1}{100} << 1$$

all'uscita del filtro l'ampiezza del segnale minimo è

$$V_{PmU} = \frac{V_{Pm1}}{G_1} = 0{,}5\mu V$$

cioè molto inferiore al rumore del voltmetro

$$V_{PmU} < \sqrt{\overline{v^2_{nm}}} = 2\mu V$$

Il filtro passivo A risulta poco efficiente: produce un segnale di uscita piccolo, tale che la sensibilità ottenibile risulta limitata dal rumore $\sqrt{\overline{v^2_{nm}}}$ del voltmetrousato per misurare il segnale filtrato.

Filtro attivo B:

$T_F = R_2C_2 = 100\ T_P = 50\mu s$ realizzabile ad es. con $C_2 = 50$ pF e $R_2 = 1$ MΩ

dato che

$$G_1 = \frac{R_2}{R_3}\frac{T_P}{T_F} = \frac{1}{100}\frac{R_2}{R_3}$$

scegliendo $R_3 = 10$ kΩ si ottiene $G_1=1$ e all'uscita del filtro il segnale minimo è

$$V_{PmU} = \frac{V_{Pm1}}{G_1} = 50\mu V$$

che risulta ben maggiore del rumore voltmetro

$$V_{PmU} >> \sqrt{\overline{v^2_{nm}}} = 2\mu V$$

Il filtro attivo B risulta più efficiente: produce un segnale di uscita elevato, tale che il rumore del voltmetro $\sqrt{\overline{v^2_{nm}}}$ risulta in ogni caso trascurabile rispetto al segnale filtrato da misurare.

(b) Misura su impulso singolo in presenza di componente di rumore 1/f

Consideriamo ora anche una componente spettrale di rumore

$$S_{1/f} = S_n \frac{f_c}{f}$$

Il GI è un filtraggio passa-basso che introduce una frequenza di taglio superiore del rumore

$$f_S = f_{nG} = \frac{1}{2T_P} = 1\text{MHz}$$

Per limitare l'effetto del rumore 1/f occorre avere anche un filtraggio passa-alto, che introduca una frequenza di taglio inferiore del rumore f_i . Per evitare di deteriorare il filtraggio del segnale occorre però che sia $f_i << f_s$.

Il rumore dovuto alla componente 1/f riferito all'ingresso si può valutare approssimativamente

$$\sqrt{\overline{v^2_{n1/f}}} \approx \sqrt{\int_{f_i}^{f_s} S_{1/f} df} = \sqrt{S_n}\sqrt{f_c}\sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)}$$

con $\sqrt{S_n}\sqrt{f_c} = 15{,}8\mu V$, f_s = 1MHz e valore di f_i dipendente dal filtraggio passa-alto utilizzato.

Consideriamo alcuni tipi semplici per tale filtraggio.

1) Misura iniziale della linea di base (circa 15 min ≈ 1000s prima di iniziare le misure) e sua sottrazione dalle successive misure. Realizza un passa-alto con $f_i \approx 0{,}001$ Hz con cui si ottiene

$$\sqrt{\overline{v^2_{n1/f}}} \approx 71\mu V$$

Poco soddisfacente, $v^2_{n1/f}$ risulta nettamente superiore a quello della componente bianca $\overline{v^2_{n1i}}$.

2) Misura della linea di base più rapida (≈ 10s prima o dopo ciascuna misura) e sua sottrazione dalla misura. Realizza un passa-alto con $f_i \approx 0{,}1$ Hz con cui si ottiene

$$\sqrt{\overline{v^2_{n1/f}}} \approx 63\mu V$$

$v^2_{n1/f}$ diminuisce, ma rimane ancora superiore a quello della componente bianca $\overline{v^2_{n1i}}$

3) filtro differenziatore CR a parametri costanti inserito <u>prima</u> del filtro GI. La costante di tempo T_i del filtro deve produrre solo una piccola riduzione del segnale misurato, cioè occorre avere T_i molto maggiore della durata del segnale: $T_i >> T_P$, tipicamente $T_i = 100\ T_P = 50\mu s$.

La frequenza di taglio è

$$f_i = \frac{1}{2\pi T_i} = 3{,}2\text{kHz}$$

con cui si ottiene

$$\sqrt{\overline{v^2_{n1/f}}} \approx 38\mu V$$

$v^2_{n1/f}$ così ottenuto è minore di quello della componente bianca $\overline{v^2_{n1i}}$ e peggiora di poco la misura.

(c) Misura con impulsi ripetitivi a frequenza f_R

Operando con costante di tempo di integrazione T_F abbastanza lunga (vedere (a) e nel seguito), entrambi i filtri A e B effettuano sulla sequenza

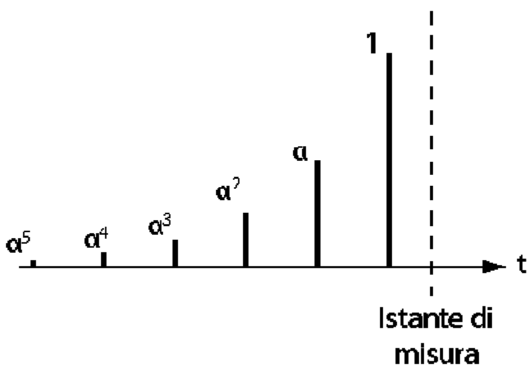
1) GI dei singoli impulsi come visto in (a)

2) somma pesata delle misure GI degli impulsi della sequenza.

Il peso w_i dato allo i-esimo impulso precedente l'istante di acquisizione della misura è:

$w_i = \alpha^i$

con valore di α dipendente dal valore della costante di tempo T_F del filtro, ma in ogni caso α<1.



Indicando per il caso di singola acquisizione GI (vedere punto (a))

s_i segnale all'uscita del filtro GI

$n_1^2 = \overline{v^2_{n1}}$ rumore all'uscita del filtro GI

$\left(\frac{S}{N}\right)_1$ rapporto segnale rumore ottenuto con GI

e per il caso di acquisizione con impulsi ripetitivi

s_a segnale all'uscita del filtro

$n_a^2 = \overline{v^2_{na}}$ rumore all'uscita del filtro

$\left(\frac{S}{N}\right)_a$ rapporto segnale rumore così ottenuto

si ha

$$s_a = s_1\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^2+.....\right) = s_1\frac{1}{1-\alpha}$$

$$n_a^2 = n_1^2\left(1+\alpha^2+\alpha^4+.....\right) = n_1^2\frac{1}{1-\alpha^2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_a = \left(\frac{S}{N}\right)_1\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$$

Se si utilizza α poco inferiore a 1 il miglioramento è notevole: 1-α<<1 e quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_a >> \left(\frac{S}{N}\right)_1$$

Notando poi che in questo caso 1+α≈ 2

$$\left(\frac{S}{N}\right)_a \approx \left(\frac{S}{N}\right)_1\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}$$

La misura su impulsi ripetitivi migliora il rapporto S/N per il fattore $\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} >> 1$ e quindi riduce il rumore riferito all'ingresso dello stesso fattore

$$\sqrt{n_{ai}^2} = \frac{\sqrt{n_{1i}^2}}{\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}}$$

e perciò riduce di altrettanto la minima ampiezza di segnale misurabile

$$V_{Pma} = \sqrt{n_{ai}^2} = \frac{V_{Pm1}}{\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}}} << V_{Pm1}$$

<u>Filtro passivo A (Boxcar Integrator)</u>

$$\alpha = \exp\left(-\frac{T_P}{T_F}\right) \qquad \text{ed essendo} \qquad \frac{T_P}{T_F} = \frac{1}{100} << 1 \text{ si ha } \quad 1-\alpha \approx \frac{T_P}{T_F}$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \approx \sqrt{\frac{2T_F}{T_P}} = 14$$

$$\sqrt{n_{ai}^2} = \frac{\sqrt{n_{1i}^2}}{\sqrt{\frac{2T_F}{T_P}}} = \frac{50\mu V}{14} = 3{,}6\mu V$$

$$V_{Pma} = \sqrt{n_{ai}^2} = 3{,}6\mu V$$

Si nota che:

- il guadagno del filtro Boxcar è unitario e il segnale in uscita non è più attenuato rispetto all'ingresso (come invece avveniva con circuito operante come GI su singola acquisizione)

$$s_a = s_1 \frac{1}{1-\alpha} \approx V_P \frac{T_P}{T_F}\frac{T_F}{T_P} = V_P$$

il segnale minimo misurabile in uscita dal Boxcar risulta maggiore del rumore $\sqrt{\overline{v_{nm}^2}}$ del voltmetro, pertanto questo rumore non limita la misura.

- il guadagno del filtro e il rapporto S/N non dipendono dalla frequenza di ripetizione f_R, perciò la misura si effettua senza inconvenienti anche quando la f_R varia.

Se ne conclude che il circuito A in questo caso risulta ben adatto ed efficiente.

Si può notare inoltre che:

- è possibile aumentare la T_F per aumentare il fattore di miglioramento. Il massimo consentito sarebbe T_F= 10MΩ 1nF= 10ms con cui si otterrebbe

  $\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \approx \sqrt{\frac{2T_F}{T_P}} = 200$ arrivando così a $V'_{Pma} = 0{,}25\mu V$

  tuttavia questa modifica non risulta conveniente perchè

  - il rumore del voltmetro $\sqrt{\overline{v_{nm}^2}} = 2\mu V$ è maggiore dell'ampiezza $V'_{Pma} = 0{,}25\mu V$ e quindi impedisce di raggiungere questa sensibilità

  - la misura diviene più lenta perchè utilizza un maggior numero di campioni

  Risulta utile solo aumentare moderatamente T_F , cioè fino a ridurre il rumore in uscita dal filtro circa eguale al rumore del voltmetro. Ciò si ottiene con $T_F \approx 156\mu s$ che produce appunto un fattore di miglioramento $\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \approx \sqrt{\frac{2T_F}{T_P}} \approx 25$

<u>Filtro passivo B (simile a Boxcar, ma con sostanziali differenze)</u>

$\alpha = \exp\left(-\frac{T_R}{T_F}\right)$ ed occorre $\frac{T_R}{T_F} << 1$ per cui si ha $1-\alpha \approx \frac{T_R}{T_F}$

Quindi occorre aumentare T_F , dato che T_R è lungo 1ms> T_R> 0,5ms.

Utilizzando il massimo possibile T_F = 10ms (realizzabile con C_2 = 1nF e R_2 = 10 MΩ)

$1-\alpha \approx \frac{T_R}{T_F}$ = varia da 10 (con T_R= 1ms) a 20 (con T_R= 0,5ms)

$\sqrt{\frac{2}{1-\alpha}} \approx \sqrt{\frac{2T_R}{T_P}}$ = varia da 4,5 (con T_R= 1ms) a 6,3 (con T_R= 0,5ms)

Da notare che il segnale di uscita risulta

$$s_a = s_1 \frac{1}{1-\alpha} \approx V_P G_1 \frac{T_F}{T_R} = V_P \frac{R_2}{R_3}\frac{T_P}{T_F}\frac{T_F}{T_R} = V_P \frac{R_2}{R_3}\frac{T_P}{T_R}$$

e quindi il guadagno del filtro G_a risulta variabile al variare della frequenza di ripetizione f_R

$$G_a = \frac{R_2}{R_3}\frac{T_P}{T_R} = \frac{R_2}{R_3} f_R T_P$$

Questo comportamento falserebbe la misura di ampiezza e perciò si deve concludere che in questo caso il circuito B NON risulta adatto.

Si puo' notare inoltre che essendo il valore di $\frac{T_P}{T_R}$ molto piccolo (varia da $5 \cdot 10^{-4}$ con T_R= 1ms a 10^{-3} con T_R= 0,5ms), anche utilizzando il massimo $R_2/R_3 = 1000$ si ha un valore di $G_a \leq 1$.