

PROBLEMA 1**Quadro dei dati****Segnale ottico:**

rettangolare a durata $T_p = 200 \mu\text{s}$; Potenza P_1 ; lunghezza d'onda $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$ oppure $\lambda_2 = 1060 \text{ nm}$.

p-i-n Fotodiodo in Silicio:

coefficiente di riflessione $K_R = 0,10$;

coefficiente di assorbimento ottico $\alpha_1 = 650 \text{ cm}^{-1}$ a $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$; $\alpha_2 = 10,5 \text{ cm}^{-1}$ a $\lambda_2 = 1060 \text{ nm}$;

spessore strato superficiale neutro $w_s = 1,5 \mu\text{m}$ e spessore strato svuotato $w_D = 30 \mu\text{m}$;

corrente di buio $I_b = 0,05 \text{ pA}$; capacita' $C_D \approx 1 \text{ pF}$

PMT Fotomoltiplicatore:

fotocatodo S1 con efficienza quantica $\eta_{D1} = 3 \cdot 10^{-3}$ a $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$; $\eta_{D2} = 6 \cdot 10^{-4}$ a $\lambda_2 = 1060 \text{ nm}$

corrente di buio al catodo $I_{bk} = 0,2 \text{ pA}$

moltiplicatore con guadagno $G = 10^5$ e fattore di eccesso di rumore $F = 2$

Preamplificatore a transimpedenza:

banda passante limitata da polo semplice a $f_{pa} = 100 \text{ MHz}$

densita' efficace unilatera di rumore di corrente riferito all'ingresso $S_{ip}^{1/2} = 0,05 \text{ pA/Hz}^{1/2}$

N.B: non si tiene conto del rumore di tensione con densita' efficace unilatera, l'enunciato del problema avverte che il suo effetto risulta trascurabile in questo caso.

(a) Responsivita'**Fotodiodo p-i-n**

L'efficienza quantica di rivelazione è $\eta_D = (1 - K_R) \cdot \exp(-\alpha w_s) \cdot (1 - \exp(-\alpha w_D))$

pertanto

$$\eta_{D1} = 0,70 \quad \text{a } \lambda_1 = 800 \text{ nm}$$

$$\eta_{D2} = 0,028 \quad \text{a } \lambda_2 = 1060 \text{ nm}$$

La responsivita' del rivelatore è $S_D = \eta \cdot \frac{\lambda q}{hc} = \eta \cdot \frac{\lambda [\mu\text{m}]}{1,24} \text{ [A/W]}$

pertanto

$$S_{D1, \text{pin}} = 0,45 \text{ A/W} \quad \text{a } \lambda_1 = 0,8 \mu\text{m}$$

$$S_{D2, \text{pin}} = 0,024 \text{ A/W} \quad \text{a } \lambda_2 = 1,06 \mu\text{m}$$

Fotomoltiplicatore PMT

$\eta_{D1} = 3 \cdot 10^{-3}$ a $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$

$\eta_{D2} = 6 \cdot 10^{-4}$ a $\lambda_2 = 1060 \text{ nm}$

La responsivita' del rivelatore è $S_D = \eta \cdot \frac{\lambda q}{hc} = \eta \cdot \frac{\lambda [\mu\text{m}]}{1,24} \text{ [A/W]}$

pertanto

$S_{D1,PMT} = 0,002 \text{ A/W}$ a $\lambda_1 = 0,8 \mu\text{m}$

$S_{D2,PMT} = 0,00051 \text{ A/W}$ a $\lambda_2 = 1,06 \mu\text{m}$

Conclusione: il fotodiodo p-i-n ha responsivita' (ed efficienza quantica) molto piu' elevata di quella del PMT: di un fattore circa 230 a $\lambda_1 = 0,8 \mu\text{m}$ e circa 45 a $\lambda_2 = 1,06 \mu\text{m}$.

(b) Rumore e minima fotocorrente misurabile con semplice filtraggio passabasso ($T_F = 1 \mu\text{s}$)

con fotodiodo p-i-n

densita' spettrale di rumore di corrente:

del preamp $S_{ip} = 2,5 \cdot 10^{-27} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

di buio del fotodiodo $S_{ib} = 2qI_B = 6,4 \cdot 10^{-32} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

totale (NB: $S_{ib} \ll S_{ip}$) $S_{iT} = S_{ip} + S_{ib} \approx S_{ip} = 2,5 \cdot 10^{-27} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

Filtrando con passabasso a un polo con $T_F = 1 \mu\text{s}$, banda di rumore (unilatera) $f_F = 1/4 T_F = 250\text{kHz}$, il rumore è

$\sqrt{i_{nF}^2} = \sqrt{S_{iT} f_F} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ A}$

e la corrente minima misurabile risulta

$I_{DF \text{ min}} = \sqrt{i_{nF}^2} = \sqrt{S_{iT} f_F} = \sqrt{\frac{S_{iT}}{4T_F}} = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ A}$

con fotomoltiplicatore PMT

densita' spettrale di rumore di corrente:

del preamp $S_{ip} = 2,5 \cdot 10^{-27} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

di buio all'anodo PMT $S_{ibA} = 2qI_{bk} \cdot F \cdot G^2 = 6,4 \cdot 10^{-32} \cdot 2 \cdot 10^{10} = 1,28 \cdot 10^{-21} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

totale all'anodo (NB: $S_{ip} \ll S_{ibA}$) $S_{iT_A} = S_{ip} + S_{ibA} \approx S_{ibA} = 1,28 \cdot 10^{-21} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

totale riferita al catodo $S_{iT_K} = \frac{S_{iT_A}}{G^2} = \frac{S_{ibA}}{G^2} = 2qI_{bk} \cdot F = 1,28 \cdot 10^{-31} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

Filtrando con passabasso a un polo con $T_F = 1 \mu\text{s}$, banda di rumore (unilatera) $f_F = 1/4 T_F = 250\text{kHz}$,

il rumore riferito al catodo è

$$\sqrt{i_{nKF}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_F} = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ A}$$

e la minima corrente al catodo misurabile è limitata dal rumore di corrente di buio al valore

$$I_{KF, \min} = \sqrt{i_{nKF}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_F} = \sqrt{\frac{S_{iTK}}{4T_F}} = 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ A} = 0,18 \text{ pA}$$

Notiamo che l'uscita del PMT è filtrata a banda larga (cioè con tempo di filtraggio breve) e pertanto potrebbero essere le fluttuazioni della fotocorrente I_{pk} a determinare la minima corrente misurabile, stabilendo un limite più alto di quello ora calcolato tenendo conto solo delle fluttuazioni della corrente di buio I_{bk} . Controlliamo se ciò si verifichi. Considerando le sole fluttuazioni della fotocorrente

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{I_{pk}^2}{F 2q I_{pk} f_F}$$

il limite minimo misurabile $I_{pk, \min}$ corrispondente a $(S/N)=1$ risulta

$$I_{pk, \min} = F 2q f_f = F \cdot \frac{q}{2T_F} = 16 \cdot 10^{-14} \text{ A} = 0,16 \text{ pA}$$

Il limite $I_{pk, \min}$ posto dalle fluttuazioni della fotocorrente risulta dunque inferiore al limite $I_{KF, \min}$ posto dalle fluttuazioni della corrente di buio, ma di poco. Pertanto anche le fluttuazioni della fotocorrente contribuiranno ad innalzare un poco il limite effettivo rispetto a $I_{KF, \min}$. Questo limite si può valutare scrivendo il $(S/N)^2$ con entrambi i contributi di fluttuazione e calcolando il valore di I_{pk} per cui $(S/N)^2 = 1$. Tuttavia è evidente che il risultato sarà poco maggiore di $I_{KF, \min} = 0,18 \text{ pA}$ e non vale la pena di calcolarlo con precisione, tanto più che per le misure si intende utilizzare il filtraggio ottimizzato (vedere punto (d)).

(c) Rumore e minima fotocorrente misurabile con filtraggio ottimizzato

Le valutazioni quantitative ottenute in (b) riguardo le densità spettrali di rumore rimangono valide cambiando il filtro, esse sono indipendenti dal tipo di filtraggio impiegato.

Dato che il rumore che accompagna il segnale è bianco, la funzione peso del filtro ottimo ha la stessa forma del segnale. In questo caso si può realizzare il filtraggio ottimo utilizzando un Gated Integrator (GI) con durata del gate T_G eguale a quella del segnale $T_G = T_p = 200 \mu\text{s}$. La banda di rumore (unilatera) di questo GI è $f_G = 1/2 T_G = 2,5 \text{ kHz}$ (si noti che la banda viene così ridotta di un fattore 100 rispetto al filtro passabasso con $T_F = 1 \mu\text{s}$).

con fotodiode p-i-n

densità spettrale di rumore di corrente:

$$S_{iT} = S_{ip} + S_{ib} \approx S_{ip} = 2,5 \cdot 10^{-27} \text{ A}^2 / \text{Hz}$$

Filtrando con Gated Integrator (GI) con $T_G = 200 \mu\text{s}$ ($f_G = 2,5 \text{ kHz}$) si ha rumore

$$\sqrt{i_{nG}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

e la corrente minima misurabile è ora

$$I_{DG \min} = \sqrt{i_{nG}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{iT}}{2T_G}} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

con fotomoltiplicatore PMT

densità spettrale di rumore di corrente riferita al catodo

$$S_{iTK} = \frac{S_{iTA}}{G^2} = \frac{S_{ibA}}{G^2} = 2qI_{bk} \cdot F = 1,28 \cdot 10^{-31} \text{ A}^2 / \text{Hz}$$

Filtrando con Gated Integrator (GI) con $T_G = 200 \mu\text{s}$ ($f_G = 2,5 \text{ kHz}$) si ha rumore riferito al catodo

$$\sqrt{i_{nKG}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_G} = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ A}$$

e la minima corrente al catodo misurabile è ora

$$I_{KG \min} = \sqrt{i_{nKG}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_G} = \sqrt{\frac{S_{iTK}}{2T_G}} = 1,8 \cdot 10^{-14} \text{ A}$$

Dato che questo filtraggio ha banda assai più stretta (tempo di filtraggio assai più lungo) del filtro passabasso con $T_F = 1 \mu\text{s}$ è evidente che le fluttuazioni della fotocorrente praticamente non contribuiscono a stabilire il limite di minima corrente misurabile.

(d) Potenza ottica minima misurabile e scelta del rivelatore

La potenza ottica minima rivelabile si ricava dividendo la corrente minima misurabile per la responsività spettrale alla lunghezza d'onda del laser impiegato. Calcoliamo i valori ottenibili con il filtraggio ottimo.

Impiegando il laser a $\lambda_1 = 800 \text{ nm}$

$$\text{con il p-i-n} \quad P_{1 \min - \text{pin}} = \frac{I_{DG \min}}{S_{D1, \text{pin}}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12}}{0,45} = 5,6 \text{ pW}$$

$$\text{con il PMT} \quad P_{1 \min - \text{PMT}} = \frac{I_{KG \min}}{S_{D1, \text{PMT}}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-14}}{0,002} = 9 \text{ pW}$$

Conclusione: a $\lambda_1 = 800$ nm si ottiene con il fotodiodo p-i-n un risultato migliore per un fattore circa 1,5 di quello ottenuto con il PMT

Impiegando il laser a $\lambda_1 = 1060$ nm

$$\text{con il p-i-n} \quad P_{2\text{min-pin}} = \frac{I_{\text{DGmin}}}{S_{\text{D2,pin}}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12}}{0,024} = 104\text{pW}$$

$$\text{con il PMT} \quad P_{2\text{min-PMT}} = \frac{I_{\text{KGmin}}}{S_{\text{D2,PMT}}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-14}}{0,00051} = 35\text{pW}$$

Conclusione: a $\lambda_2 = 1060$ nm si ottiene con il PMT un risultato migliore per un fattore circa 3 di quello ottenuto con il fotodiodo p-i-n

(e) Misure effettuate con preamplificatore ad elevato rumore 1/f

Nei casi in cui occorre misurare un impulso accompagnato da solo rumore bianco (rumore a larga banda) il filtraggio ottimo e' un filtro passabasso con banda f_G eguale a quella del segnale (vedere (c)). Se si aggiunge una componente di rumore 1/f il risultato naturalmente peggiora e il grado di peggioramento si può stimare confrontando entro la banda del filtro detto il valore della densità spettrale della componente 1/f con quello della componente bianca. A questo scopo basta confrontare il valore della frequenza d'angolo f_c del rumore 1/f con il limite di banda f_G .

Se $f_c/f_G \leq 1$, cioè se il valore di f_c è paragonabile o lievemente inferiore al limite di banda del filtraggio f_G , il contributo 1/f può venire limitato a livello paragonabile o poco maggiore di quello del rumore bianco aggiungendo un opportuno filtraggio passa-alto.

Al diminuire del valore di $f_c/f_G < 1$ l'aggiunta del filtraggio passa-alto detto permette di ridurre progressivamente il contributo del rumore 1/f. Se $f_c/f_G \ll 1$ si può arrivare a un risultato vicino a quello valutato per il caso di solo rumore bianco.

Se invece $f_c/f_G > 1$ la componente 1/f ha un ruolo dominante e il peggioramento rispetto al caso di solo rumore bianco è notevole anche utilizzando al meglio possibile un filtraggio passa-alto aggiuntivo.

Esaminiamo la situazione con ciascuno dei due fotorivelatori.

con fotodiodo p-i-n

Nel rumore totale (vedere il punto (b)) la componente bianca di rumore di corrente di buio del fotodiodo è trascurabile rispetto alla componente bianca del preamplificatore. Pertanto anche quando il preamplificatore funziona collegato al rivelatore p-i-n la componente 1/f si confronta

praticamente solo con la componente bianca di rumore del preamplificatore e la frequenza d'angolo da considerare nella valutazione del contributo del rumore $1/f$ è ancora la f_c specificata per il preamplificatore.

In questo caso dunque abbiamo $f_c = 2,5$ MHz e $f_G = 2,5$ kHz e quindi

$$f_c / f_G = 1000$$

La situazione è molto sfavorevole: la densità spettrale della componente $1/f$ molto elevata anche al limite superiore della banda di filtraggio

$$S_{1/f}(f_G) = \frac{S_{ip} f_c}{f_G} = 10^3 S_{ip} \quad \text{ovvero} \quad \sqrt{S_{1/f}(f_G)} = 31,6 \cdot \sqrt{S_{ip}} .$$

Conclusione: anche senza effettuare calcoli dettagliati, risulta chiaro che utilizzando il preamplificatore proposto con il fotodiodo p-i-n si ottengono risultati molto peggiori di quelli ottenibili con un preamplificatore a basso rumore $1/f$ (cioè che abbia $f_c \leq f_G$).

con fotomoltiplicatore PMT

Nel rumore totale (vedere il punto (b)) la componente bianca di rumore S_{ibA} dovuta alla corrente di buio del PMT risulta molto maggiore della componente bianca S_{ip} del preamplificatore. Pertanto quando il preamplificatore funziona collegato al PMT la componente di rumore $1/f$

$$S_{1/f} = \frac{S_{ip} f_c}{f}$$

non si confronta più solo con S_{ip} , ma anche con S_{ibA} . La frequenza d'angolo, a cui la componente $1/f$ ha densità spettrale eguale alla componente bianca, ha in questo caso un valore diverso f_{cM} individuato da

$$\frac{S_{ip} f_c}{f_{cM}} = S_{ip} + S_{ibA} \approx S_{ibA} \quad (\text{dato che } S_{ibA} \approx 5 \cdot 10^5 S_{ip})$$

cioè

$$f_{cM} \approx f_c \frac{S_{ip}}{S_{ibA}} = 2 \cdot 10^{-6} = 5 \text{ Hz}$$

In questo caso perciò la frequenza d'angolo del rumore è molto più piccola del limite di banda del filtraggio

$$\frac{f_{cM}}{f_G} = 2 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

pertanto aggiungendo un filtraggio passa-alto opportunamente dimensionato si può ottenere un risultato vicino a quello calcolato per il caso senza rumore $1/f$.

Conclusione: grazie all'elevato guadagno interno del PMT, nelle misure effettuate con questo rivelatore si può ottenere buoni risultati anche utilizzando un preamplificatore con intensa componente di rumore $1/f$ (cioè con frequenza d'angolo f_c molto elevata).