PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Impulso: $s_x(t) = V_P \cdot e^{-\frac{t}{T_P}}$ con T_P =10 μs e V_P variabile

Rumore: densità (unilatera) $S_n = 50\ nVHz^{-1/2}$ a larga banda limitata da polo semplice con costante di tempo T_n = 1ns

Campionatore a frequenza di clock $f_S = \frac{1}{T_S}$ regolabile con continuità da 1 a 10 MHz

a) Filtraggio ottimo

Il rumore può essere considerato bianco perchè ha banda molto più grande del segnale (ovvero tempo di autocorrelazione T_n molto più piccolo di quello del segnale T_P). Pertanto il filtro ottimo è semplicemente il filtro "matched", con funzione peso eguale al segnale

$$w_{op}(\alpha) = \frac{1}{T_P} \cdot e^{-\frac{\alpha}{T_P}}$$

In uscita dal filtro ottimo si ha

Segnale $s_{y,op} = \int_0^{\infty} s_x(\alpha) w_{op}(\alpha) d\alpha = \frac{V_P}{2}$

Rumore $\overline{n_{y,op}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_n}{2} \delta(\alpha)\, k_{ww}(\alpha)\, d\alpha = \frac{S_n}{2} k_{ww}(0) = S_n \frac{1}{4T_P}$

quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 = \left(\frac{V_P}{2}\right)^2 \frac{1}{S_n \frac{1}{4T_P}}$$

L'ampiezza minima misurabile corrisponde a (S/N)=1 ed è

$$V_{P\min,op} = S_n^{1/2} \sqrt{\frac{1}{T_P}} = 15{,}8\ \mu\text{V}$$

Senza filtraggio si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)_x^2 = V_P^2 \frac{1}{S_n \dfrac{1}{4T_n}}$$

e l'ampiezza minima misurabile risulta maggiore per il fattore $\sqrt{\dfrac{T_P}{4T_n}} = 50$

$$V_{P\min,x} = S_n^{1/2} \sqrt{\frac{1}{4T_n}} = 790\ \mu\text{V}$$

b) <u>Filtraggio con passabasso RC semplice (a 1 polo)</u>

La funzione peso w_{RC} di un filtro passabasso a parametri costanti RC ha una certa somiglianza con quella del filto ottimo w_{op} , ma anche notevoli differenze. Osservate nel tempo $w_{op}(t)$ e $w_{RC}(t)$ hanno entrambe andamento esponenziale, ma decrescente in sensi opposti. Osservate in frequenza, $W_{op}(f)$ e $W_{RC}(f)$ hanno entrambe diagramma del modulo di forma lorenziana. I diagrammi di fase sono simili, ma l'uno ribaltato in frequenza rispetto all'altro. Si intuisce perciò che con il passabasso si possono ottenere risultati non molto peggiori dell'ottimo. Per la scelta del valore di T_F , si nota che con $T_F = T_P$ si ottiene una funzione peso più somigliante a quella ottima rispetto agli altri casi con valori $T_F \neq T_P$. Adottiamo questa scelta senza effettuare la verifica con il calcolo dettagliato del massimo del (S/N) in funzione di T_F , che non è richiesta (Sappiamo che si tratta di un calcolo laborioso, ma non difficile, che conferma la scelta $T_F = T_P$)

La risposta del filtro all'impulso è

$$h(t) = \frac{1}{T_P} \cdot e^{-\frac{t}{T_P}}$$

E quindi l'impulso in uscita dal filtro è

$$y_{RC}(t) = V_P \frac{t}{T_P} \cdot e^{-\frac{t}{T_P}}$$

che ha il massimo per $t=T_P$

$$s_{RC} = y_{RC}(T_P) = \frac{V_P}{e}$$

Il rumore in uscita è

$$\overline{n_{y,RC}^2} = \frac{S_n}{2} k_{hh}(0) = S_n \frac{1}{4T_P}$$

Si nota che rispetto all'ottimo il rumore è uguale, ma il segnale è più piccolo per il fattore $\frac{e}{2} = 1,36$.

e quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{RC} = \left(\frac{V_P}{e}\right)^2 \frac{1}{S_n \frac{1}{4T_P}}$$

L'ampiezza minima misurabile corrispondente a (S/N)=1 è

$$V_{P\min,RC} = \frac{e}{2} S_n^{1/2} \sqrt{\frac{1}{T_P}} = \frac{e}{2} V_{P\min,op} = 21{,}5\ \mu\text{V}$$

c) <u>Filtraggio approssimante il filtraggio ottimo con media di campioni discreti</u>

Per approssimare il filtraggio ottimo continuo

$$s_{y,op} = \int_0^{\infty} s_x(\alpha)\, w_{op}(\alpha)\, d\alpha$$

con un filtraggio a media pesata di campioni

$$s_{y,D} = \sum_{k=0}^{\infty} s_x(kT_s)\, w_D(kT_s)$$

l'andamento dei pesi discreti deve seguire quello della funzione peso ottima e quindi

$$w_D(kT_S) = Ae^{-\frac{kT_S}{T_P}} = A\, r^k \qquad \text{(con} \quad r = e^{-\frac{T_S}{T_P}}\text{)}$$

A è un fattore di guadagno, che non ha influenza sul (S/N). Per semplicità assumiamo A=1.

Notiamo che

$$s_x(kT_s) = V_P e^{-k\frac{T_S}{T_P}} = V_P\, r^k$$

Il filtraggio discreto produce quindi un segnale

$$s_{y,D} = \sum_{k=0}^{\infty} s_x(kT_s)\, w_D(kT_s) = V_P \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} = V_P \frac{1}{1-r^2}$$

Per approssimare il pesaggio continuo occorre che il numero di campioni per intervallo T_P sia elevato e cioè

$$\frac{T_S}{T_P} \ll 1 \qquad \text{quindi} \qquad 1-r^2 = 1-e^{-\frac{2T_S}{T_P}} \cong \frac{2T_S}{T_P}$$

pertanto il segnale in uscita dal filtro discreto risulta

$$s_{y,D} = V_P \frac{1}{1-r^2} \cong \frac{V_P}{2} \frac{T_P}{T_S}$$

Il calcolo del rumore si può eseguire considerando i campioni incorrelati, dato che sono separati da un intervallo T_S molto maggiore del tempo di correlazione del rumore $2T_n$. Perciò il rumore è dato dalla somma dei valori quadratici medi dei campioni pesati (senza termini di mutua corelazione tra campioni)

$$\overline{n_{y,D}^2} = \overline{n_x^2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} = \overline{n_x^2} \frac{1}{1-r^2} = S_n \frac{1}{4T_n} \frac{1}{1-r^2} \cong S_n \frac{1}{4T_n} \frac{T_P}{2T_S}$$

Quindi si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D^2 \cong \left(\frac{V_P}{2}\right)^2 \frac{1}{S_n \frac{1}{4T_P}} \cdot \frac{2T_n}{T_S} = \left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 \cdot \frac{2T_n}{T_S}$$

e ampiezza minima misurabile

$$V_{P\min,D} \cong S_n^{1/2} \sqrt{\frac{1}{T_P}} \sqrt{\frac{T_S}{2T_n}} = V_{P\min,op} \sqrt{\frac{T_S}{2T_n}}$$

Come è intuitivo, il miglior risultato si ottiene utilizzando la massima frequenza di campionamento disponibile. Con $f_S = 10\text{MHz}$ ($T_S = 100\text{ns}$) l'ampiezza minima risulta maggiore dell'ottimo per un fattore $\sqrt{50} = 7{,}07$

$$V_{P\min,D} = V_{P\min,op} \sqrt{\frac{T_S}{T_n}} = \sqrt{50} \cdot V_{P\min,op} = 112\ \mu\text{V}$$

d) <u>Filtraggio complementare per migliorare il filtraggio a media di campioni discreti</u>

Inseriamo prima dello strumento che preleva i campioni ed esegue la media pesata un prefiltraggio, effettuato con un filtro passabasso (a parametri costanti) con banda più stretta di quella del rumore, ma molto più larga di quella del segnale. All'uscita di questo prefiltro si può considerare praticamente inalterato il segnale e il rumore ancora bianco rispetto ad esso (ma con potenza ridotta). Si può quindi considerare ancora valido il filtro ottimo visto in (a) e la sua approssimazione a campioni pesati vista in (c).

Se il prefiltro è dimensionato in modo che rimanga trascurabile la correlazione tra campioni di rumore presi con intervallo T_S (cioè se ha funzione peso nulla o trasurabile al di fuori di un intervallo T_S) rimane valido anche l'approccio di calcolo usato in (c). In questo caso è evidente e facilmente valutabile il miglioramento portato dal prefiltro: il rumore del singolo campione è ridotto per effetto del prefiltro e rimane invariato il fattore di riduzione del rumore dovuto all'effetto della media.

Consideriamo un esempio di questo genere.

Caso d1 - Prefiltro passabasso a 1 polo con costante di tempo T_F .

La sua f. di autocorrelazione (della f.peso w_F o della risposta all'impulso h_F) è

$$k_{ww,F}(t) = k_{hh,F}(t) = \frac{1}{2T_F}\, e^{-\frac{t}{T_F}}$$

Per avere trascurabile correlazione tra campioni occorre sia

$$\frac{k_{hh,F}(T_S)}{k_{hh,F}(0)} = e^{-\frac{T_S}{T_F}} \leq 0,01 \qquad \text{cioè} \quad \frac{T_F}{T_S} \leq \frac{1}{4,6}$$

Il rumore sul singolo campione preso all'uscita del prefiltro è

$$\overline{n_F^2} = S_n \frac{1}{4T_F} = S_n \frac{5}{4T_S}$$

All'uscita dello strumento che esegue campionamento e media il rumore ora risulta

$$\overline{n_{y,DF}^2} = \overline{n_F^2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} = \overline{n_F^2} \frac{1}{1-r^2} = S_n \frac{1}{4T_F}\frac{1}{1-r^2} = S_n \frac{1}{4T_F}\frac{T_P}{2T_S}$$

mentre il segnale è praticamente invariato. Pertanto si ha ora

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{DF} = \left(\frac{V_P}{2}\right)^2 \frac{1}{S_n \frac{1}{4T_P}} \cdot \frac{2T_F}{T_S} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot \frac{2T_F}{T_S}$$

quindi ampiezza minima

$$V_{P\min,DF} = S_n^{1/2} \sqrt{\frac{1}{T_P}} \sqrt{\frac{T_S}{2T_F}} = V_{P\min,op} \sqrt{\frac{T_S}{2T_F}}$$

Scegliendo $T_F = T_S /5$ si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{DF} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot \frac{2T_F}{T_S} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot \frac{2}{5}$$

e l'ampiezza minima risulta maggiore dell'ottimo per un fattore ridotto a $\sqrt{5} = 2,24$

$$V_{P\min,DF} = V_{P\min,op}\sqrt{\frac{T_S}{T_F}} = \sqrt{5}\cdot V_{P\min,op} = 35\ \mu\text{V}$$

Per ottenere il migliore risultato possibile con un prefiltro del genere detto occorre che esso realizzi il filtraggio più efficiente nell'intervallo T_S . Occorre cioè che esso abbia funzione peso uniforme entro l'intervallo T_S e nulla fuori di esso. Pertanto consideriamo ora:

<u>Caso d2 - Prefiltro "running integrator" con durata T_I</u> .

La risposta all'impulso h_I (e la funzione peso w_I) è rettangolare con durata T_I e la relativa funzione di autocorrelazione è triangolare

$$k_{ww,I}(t) = k_{hh,I}(t) = \frac{1}{T_I}\left|1-\frac{t}{T_I}\right| \qquad \text{per } |t| \le T_I$$

$$k_{ww,I}(t) = k_{hh,I}(t) = 0 \qquad \text{per } |t| > T_I$$

Per avere correlazione trascurabile tra i campioni occorre sia $T_I \le T_S$.

Il rumore sul singolo campione preso all'uscita del prefiltro è

$$\overline{n_I^2} = S_n\frac{1}{2T_I} = S_n\frac{1}{2T_S}$$

All'uscita dello strumento che esegue campionamento e media il rumore è ora

$$\overline{n_{y,DI}^2} = \overline{n_I^2}\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} = \overline{n_I^2}\frac{1}{1-r^2} = S_n\frac{1}{2T_I}\frac{1}{1-r^2} = S_n\frac{1}{2T_I}\frac{T_P}{2T_S}$$

mentre il segnale è praticamente invariato. Pertanto si ha ora

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DF}^2 = \left(\frac{V_P}{2}\right)^2\frac{1}{S_n\frac{1}{4T_P}}\cdot\frac{T_I}{T_S} = \left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2\cdot\frac{T_I}{T_S}$$

quindi ampiezza minima

$$V_{P\min,DF} = S_n^{1/2}\sqrt{\frac{1}{T_P}}\sqrt{\frac{T_S}{T_I}} = V_{P\min,op}\sqrt{\frac{T_S}{T_I}}$$

Il miglior risultato si ottiene evidentemente scegliendo $T_I = T_S$. Con le approssimazioni viste si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DF}^2 \cong \left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 \qquad \text{e quindi} \qquad V_{P\min,DF} \cong V_{P\min,op}$$