

**PROBLEMA 1**

**Quadro dei dati**

Forza applicata: F costante per durata  $T_A = 80$  ms

Sensore piezoelettrico: capacità  $C_S = 500$  pF  
 costante di conversione  $A_Q = 5$  pC / N

Preamplificatore: impedenza ingresso  $\rightarrow \infty$   
 larga banda limitata da polo a  $f_{pa} = 20$  MHz  
 rumore di tensione  $S_V^{1/2} = 4$  nV/Hz<sup>1/2</sup> (unilatera)  
 rumore di corrente  $S_i^{1/2} = 0,01$  pA/Hz<sup>1/2</sup> (unilatera)  
 componenti 1/f con  $f_c = 500$  Hz

**a) Filtraggio ottimo**

Forza applicata F

Carica piezoelettrica  $Q = A_Q F$

Segnale a ingresso (e uscita) del preamp:  $V_s = \frac{Q}{C_s}$

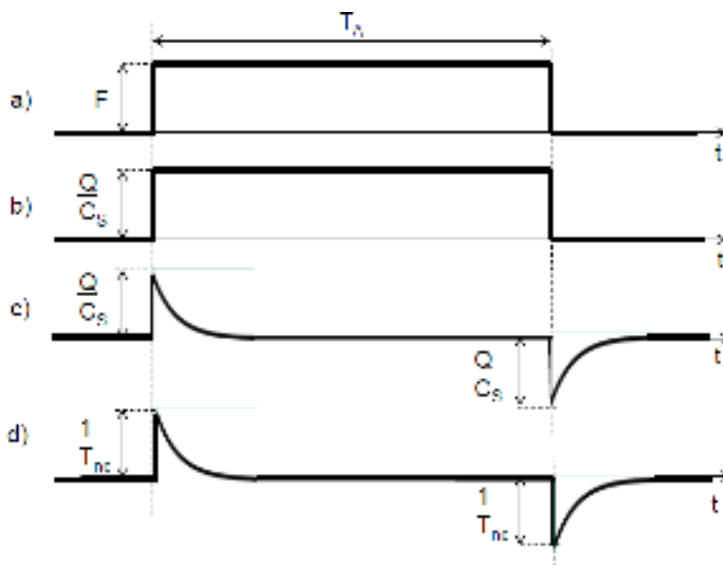


Fig. 1 a) Forza applicata al sensore piezoelettrico  
 b) Segnale di tensione sul sensore  
 c) Segnale di tensione all'uscita del filtro sbiancante  
 d) funzione peso del filtro adattato (matched filter)

Il rumore totale a ingresso (e in uscita) del preamp NON è bianco

$$S_S = S_v + \frac{S_i}{\omega^2 C_s^2} = S_v \frac{1 + \omega^2 \frac{C_s^2 S_v}{S_i}}{\omega^2 \frac{C_s^2 S_v}{S_i}} = S_v \frac{1 + \omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$$

cost. di tempo caratteristica è  $T_{nc} = \frac{C_s S_v^{1/2}}{S_i^{1/2}} = 200 \mu s$

Filtro ottimo = Filtro sbiancante seguito da Filtro adattato (matched filter).

Filtro sbiancante  $H_B(f)$ :

a par. costanti, applicato dopo il preamp: differenziatore CR con costante di tempo  $T_B = T_{nc}$

$$|H_B|^2 = \frac{\omega^2 T_B^2}{1 + \omega^2 T_B^2} = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1 + \omega^2 T_{nc}^2}$$

In uscita da  $H_B$  il rumore è bianco

$$S_B = S_S |H_B|^2 = S_v$$

e il segnale (Fig. 1) è costituito da due impulsi esponenziali, positivo all'istante  $t = 0$  in cui viene applicata la forza e negativo all'istante  $t = T_A$  in cui viene tolta

$$v_B(t) = \frac{Q}{C_S} \left[ 1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_{nc}}} - 1(t - T_A) \cdot e^{-\frac{t - T_A}{T_{nc}}} \right]$$

Filtro matched:

ha funzione peso  $w_M(\alpha)$  di forma identica al segnale  $v_B$ , cioè (Fig.1)

$$w_M(\alpha) = \frac{1}{T_{nc}} \left[ 1(t) \cdot e^{-\frac{\alpha}{T_{nc}}} - 1(\alpha - T_A) \cdot e^{-\frac{\alpha - T_A}{T_{nc}}} \right]$$

Si nota che  $T_{nc} \ll T_B$  cioè che i due impulsi esponenziali sono ben separati e i calcoli risultano semplificati. In uscita dal filtro matched si ha

segnale  $V_M = \int_0^\infty v_B(\alpha) w_M(\alpha) d\alpha$

rumore  $\sqrt{v_{n,M}^2} = \int_{-\infty}^\infty S_{V,bil} \delta(\tau) k_{ww,M}(\tau) d\tau = S_{V,bil} k_{ww,M}(0) = \frac{S_V}{2} k_{ww,M}(0)$

Se la forza fosse applicata e mantenuta indefinitamente il segnale sul sensore sarebbe a gradino, il segnale a valle del filtro sbiancante  $v_B(\alpha)$  avrebbe solo un impulso esponenziale e così pure  $w_M(\alpha)$  e si avrebbe pertanto

$$\text{segnale} \quad V_{M,u} = \frac{Q}{2C_s}$$

$$\text{rumore} \quad \sqrt{v_{n,Mu}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{4T_{nc}}}$$

$$\text{quindi} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{Mu} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}}$$

Nel caso di forza applicata a durata finita  $T_A$  (impulso rettangolare)  $v_B(\alpha)$  e  $w_M(\alpha)$  hanno due impulsi esponenziali ben separati: il segnale e il valore quadratico medio del rumore aumentano di un fattore 2 rispetto al caso di forza a gradino

$$\text{segnale} \quad V_{M,r} = 2V_{M,u} = \frac{Q}{C_s}$$

$$\text{rumore} \quad \sqrt{v_{n,Mr}^2} = \sqrt{2v_{n,Mu}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2T_{nc}}}$$

$$\text{quindi} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{Mr} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}} \cdot \sqrt{2}$$

Il minimo segnale di tensione misurabile risulta così

$$V_{M,r \min} = \sqrt{v_{n,Mr}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2T_{nc}}} = 200nV$$

e corrisponde a una carica piezoelettrica minima

$$Q_{M,r \min} = C_s V_{M,r \min} = 10^{-16} C$$

e quindi a una forza minima misurabile

$$F_{M,r \min} = \frac{Q_{\min}}{A_Q} = 20\mu N$$

**b) Approssimazione del filtraggio ottimo utilizzando gated integrator**

Si puo' ottenere un filtraggio con funzione peso approssimante quella ottima utilizzando un gated integrator (GI) che effettua in sequenza la misura sui due impulsi esponenziali del segnale  $v_B$  e poi sottraendo la seconda misura dalla prima.

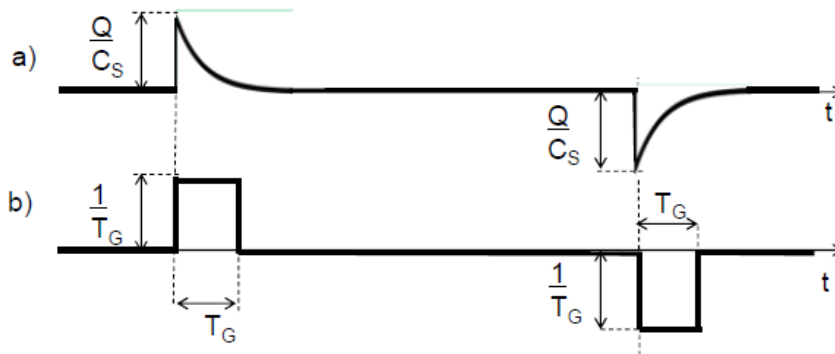


Fig. 1 a) Segnale di tensione all'uscita del filtro sbiancante  
 b) funzione peso del Gated Integrator)

Il risultato dipende dal tempo di gate  $T_G$  che perciò' va scelto in modo da ottenere il miglior risultato possibile con questo tipo di filtraggio. Anche in questo caso ci si puo' chiarire le idee considerando prima il caso semplice di forza applicata a gradino e poi quello con forza applicata a durata finita  $T_A$  (impulso rettangolo).

Detta  $w_G$  la funzione peso di questo filtraggio, si ha

segnale 
$$V_G = \int_0^{\infty} v_B(\alpha) w_G(\alpha) d\alpha$$

rumore 
$$\sqrt{v_{n,G}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{V,bil} \delta(\tau) k_{ww,G}(\tau) d\tau = S_{V,bil} k_{ww,G}(0) = \frac{S_V}{2} k_{ww,G}(0)$$

Con forza applicata a gradino, considerando di usare GI a peso normalizzato cioe'

$$w_G(\alpha) = \frac{1}{T_G} \quad \text{per } 0 < \alpha < T_G \quad \text{e altrove} \quad w_G(\alpha) = 0$$

si ha

segnale 
$$V_{Gu} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1 - e^{-T_G/T_{nc}}}{T_G/T_{nc}}$$

$$\text{rumore} \quad \sqrt{v_{n,Gu}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2T_G}} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2T_{nc}}} \sqrt{\frac{T_{nc}}{T_G}}$$

$$\text{quindi} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{Gu} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1 - e^{-T_G/T_{nc}}}{\sqrt{\frac{T_G}{T_{nc}}}}$$

$$\text{cioe' indicando con} \quad x = \frac{T_G}{T_{nc}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Gu} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{Mu} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

la funzione  $g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x}}$  presenta per  $x \approx 1,25$  il massimo  $g_{\max} \approx 0,638$  e quindi produce un fattore  $\sqrt{2}g_{\max} = 0,9$ . Dunque con  $T_G \approx 1,25 T_{nc} \approx 250 \mu\text{s}$  si ottiene un risultato di poco inferiore al filtro ottimo, solo del 10%.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Gu} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}} \cdot 0,9 \cong \left(\frac{S}{N}\right)_{Mu} \cdot 0,9$$

Va notato che la regolazione di  $T_G$  non è critica perchè il massimo di  $g(x)$  è poco pronunciato: tra  $x=1$  ed  $x=1,6$  la funzione  $g(x)$  varia solo di pochi %.

Nel caso di forza applicata per durata  $T_A$ ,  $v_B(\alpha)$  ha due impulsi esponenziali ben separati e  $w_G(\alpha)$  in corrispondenza ha due impulsi rettangolari di durata  $T_G$ . Rispetto al caso di forza a gradino il segnale e il valore quadratico medio del rumore aumentano di un fattore 2 e quindi S/N aumenta di un fattore  $\sqrt{2}$ .

$$\text{segnale} \quad V_{Gr} = \frac{Q}{C_s} \cdot 2 \frac{1 - e^{-T_G/T_{nc}}}{\frac{T_G}{T_{nc}}}$$

$$\text{rumore} \quad \sqrt{v_{n,Gr}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_G}} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}} \sqrt{\frac{T_{nc}}{T_G}} = 253 \text{ nV}$$

quindi 
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Gr} = \frac{Q}{C_s} \cdot \frac{1}{\frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_{nc}}}} \cdot 2 \cdot \frac{1 - e^{-T_G/T_{nc}}}{\sqrt{T_G}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{Mr} \sqrt{2} \cdot \frac{1 - e^{-T_G/T_{nc}}}{\sqrt{T_G}}$$

Si ottimizza con la scelta  $x \approx 1,25$  giungendo a

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{Gr} \cong \left(\frac{S}{N}\right)_{Mr} \cdot 0,9$$

e quindi ottenendo una carica piezoelettrica minima misurabile

$$Q_{G,r\min} = \frac{Q_{M,r\min}}{0,9} = 1,11 \cdot 10^{-16} C$$

ed una corrispondente forza minima misurabile

$$F_{g,r\min} = \frac{F_{M,r\min}}{0,9} = 22 \mu N$$

**c) Effetto del rumore 1/f**

c1) Componente 1/f del rumore di corrente

$$S_{if} = \frac{S_i f_c}{f}$$

viene filtrata dalla capacita' del sensore  $C_s$  che effettua una integrazione semplice producendo uno spettro di tensione

$$S_{if} \frac{1}{\omega^2 C_s^2}$$

e poi dal filtro sbiancante che cancella il polo a  $\omega=0$  e lo sostituisce con il polo a  $\omega_{nc}=1/T_{nc}$

$$S_{if} \frac{1}{\omega^2 C_s^2} \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1 + \omega^2 T_{nc}^2} = \frac{S_{if} T_{nc}^2}{C_s^2} \frac{1}{1 + \omega^2 T_{nc}^2}$$

Pertanto, a valle del filtro sbiancante la componente 1/f del rumore di corrente non ha subito nessun filtraggio passa-alto, ma solo un filtraggio passa-basso semplice con polo a  $\omega_{nc}=1/T_{nc}$ . Tenuto

conto della relazione  $T_{nc} = \frac{C_s S_v^{1/2}}{S_i^{1/2}}$  si nota che

$$\frac{S_{if} T_{nc}^2}{C_s^2} = \frac{S_i T_{nc}^2}{C_s^2} \frac{f_c}{f} = S_v \frac{f_c}{f}$$

e quindi lo spettro di tensione dopo il filtro sbiancante è

$$S_V \frac{f_c}{f} \frac{1}{1+(2\pi f)^2 T_{nc}^2}$$

La forma della funzione peso del filtraggio che approssima l'ottimo utilizzando un Gated Integrator mette in evidenza che questo filtro produce

- un filtraggio passabasso con frequenza di taglio  $1/2T_G$  (integrazione su  $T_G$ )
- un filtraggio passa-alto con frequenza di taglio  $1/T_A$  (sottrazione delle due operazioni di GI separate da un intervallo  $T_A$ )

Il filtraggio passa-basso rinforza il taglio ad alta frequenza portandolo a  $f_s \approx 1/2T_G$ , cioè con la scelta  $T_G \approx 1,25T_{nc}$  a frequenza di taglio  $f_s \approx 1/2,5 T_{nc}$ .

Il filtraggio passa-alto stabilisce per il rumore  $1/f$  una frequenza di taglio inferiore  $f_{ii} \approx 1/T_A \approx 12,5\text{Hz}$ .

Il contributo del rumore  $1/f$  valutato con l'approssimazione a taglio netto in frequenza

$$\sqrt{v_{n,GF}^2} = \sqrt{S_v f_c} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_{ii}}\right)} \approx \sqrt{S_v f_c} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{T_A}{2,5T_{nc}}\right)} = 201 \text{ nV}$$

risulta accettabile in quanto risulta lievemente minore del contributo di rumore dello spettro privo di componenti  $1/f$

$$\sqrt{v_{n,Gr}^2} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{T_G}} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{1,25T_{nc}}} = 253 \text{ nV}$$

### c2) Componente $1/f$ del rumore di tensione

$$S_{Vf} = \frac{S_v f_c}{f}$$

Per questa componente

- la capacità del sensore  $C_S$  non esercita alcun filtraggio
- il filtro sbiancante ha una azione passa-alto che produce uno spettro attenuato verso le basse frequenze con frequenza di taglio  $f_{iV} \approx 1/2\pi T_{nc} \approx 800\text{Hz}$  assai piu' elevata di quella per il rumore di corrente  $f_{ii} \approx 1/T_A \approx 12,5\text{Hz}$

$$S_{Vf} \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1 + \omega^2 T_{nc}^2} = S_v \frac{f_c}{f} \frac{(2\pi f)^2 T_{nc}^2}{1 + (2\pi f)^2 T_{nc}^2}$$

- Il filtro che approssima l'ottimo utilizzando Gated Integrator agisce come sopra descritto, ponendo verso le alte frequenze la frequenza di taglio  $f_s \approx 1/2T_G$ .

Confrontiamo con quanto visto per la componente  $1/f$  del generatore di rumore di corrente. Per valutare il contributo di rumore della componente  $1/f$  del generatore di rumore di tensione

dobbiamo considerare eguale densità spettrale  $S_{Vf} = \frac{S_V f_c}{f}$ , eguale frequenza di taglio superiore, ma

frequenza di taglio inferiore molto più alta  $f_{iV} \gg f_{ii}$ . E' evidente che il contributo della componente  $1/f$  di tensione risulta nettamente inferiore a quello della componente  $1/f$  di corrente e pertanto è trascurabile.