PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Impulso di corrente del rivelatore

$I_s = (Q_s/T_s)\ 1(t)\ \exp(-t/T_s)$

$T_s = 1\ \mu s$

Preamplificatore

Limite di banda → ∞

Resistenza di ingresso → ∞

Capacità all' ingresso (complessiva di rivelatore e preamp) C_L = 2 pFΩ

Rumore

$S_v^{1/2}$ = 20 nV/Hz$^{1/2}$ bianca (unilatera)

$S_i^{1/2}$ = 0,01 pA/Hz$^{1/2}$ bianca (unilatera)

(A) Rumore e filtro sbiancante

Rumore complessivo riportato in tensione all'ingresso del preamplificatore

$$S(\omega) = S_v + \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2} = S_v\left(1 + \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2 S_v}\right) = S_v \frac{1 + \omega^2 C_L^2 \frac{S_v}{S_i}}{\omega^2 C_L^2 \frac{S_v}{S_i}}$$

La costante di tempo caratteristica del rumore è

$$T_n = C_L \frac{S_v^{1/2}}{S_i^{1/2}} = 4\mu s$$

quindi

$$S(\omega) = S_v \frac{1 + \omega^2 T_n^2}{\omega^2 T_n^2}$$

Detta H(ω) la funzione di trasferimento del filtro a parametri costanti, per sbiancare il rumore occorre un filtro che abbia

$$\left|H\right|^2 = \frac{\omega^2 T_n^2}{1+\omega^2 T_n^2}$$

Si tratta di un passa-alto derivatore approssimato CR con RC=T_n = 4 μs

$$H(s) = \frac{sT_n}{1+sT_n}$$

In uscita si ottiene rumore bianco

$$S_B\left(\omega\right) = S_v \frac{1+\omega^2 T_n^2}{\omega^2 T_n^2}\left|H\left(\omega\right)\right|^2 = S_v$$

Il segnale esponenziale di corrente del rivelatore

$$X(s) = Q\frac{1}{1+sT_p} \qquad \text{corrispondente a} \qquad x(t) = Q\frac{1(t)}{T_p}e^{-\frac{t}{T_p}}$$

produce sulla capacità C_L un segnale integrato di tensione

$$\frac{Q}{C}\frac{1}{s}\frac{1}{1+sT_p} \qquad \text{corrispondente a} \qquad \frac{Q}{C}\left(1-e^{-\frac{t}{T_p}}\right)$$

che passando attraverso il preamplificatore e il filtro sbiancante diviene

$$\frac{Q}{C}T_n\frac{1}{1+sT_n}\frac{1}{1+sT_p}$$

che corrisponde al segnale del rivelatore $\frac{Q}{1+sT_p}$ passato da un filtraggio passabasso $\frac{T_n}{C}\frac{1}{1+sT_n}$

Consideriamo ora la forma di questo segnale, cioè il segnale normalizzato a frequenza zero e troviamo le sue due componenti

$$Y(s) = \frac{1}{1+sT_p}\frac{1}{1+sT_n} = \frac{A}{1+sT_p} + \frac{B}{1+sT_n} \quad \text{con} \quad A = -\frac{T_p}{T_n - T_p} \qquad B = \frac{T_n}{T_n - T_p}$$

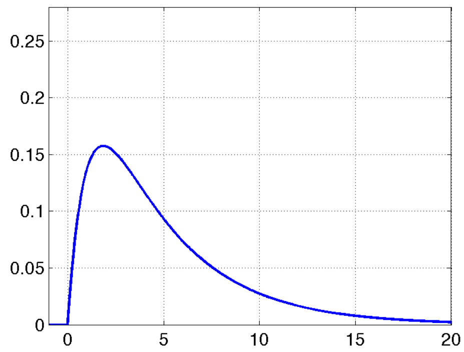
Quindi

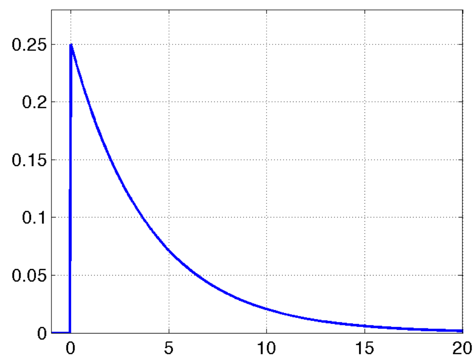
$$Y(s) = \frac{T_n}{T_n - T_p}\frac{1}{1+sT_n} - \frac{T_p}{T_n - T_p}\frac{1}{1+sT_p}$$

Che corrisponde nel tempo a un segnale normalizzato in area

$$y(t) = A\frac{1}{T_p}e^{-\frac{t}{T_p}} + B\frac{1}{T_n}e^{-\frac{t}{T_n}} = \frac{1}{T_n - T_p}(e^{-\frac{t}{T_n}} - e^{-\frac{t}{T_p}})$$

Questa forma di y(t) risulta abbastanza diversa da quella che si avrebbe nel caso di segnale di corrente dal rivelatore impulsivo (a δ di Dirac). La figura seguente mette appunto a confronto queste due forme d'onda normalizzate nel tempo.





Il segnale effettivo in uscita dal filtro sbiancante (con la sua ampiezza, non normalizzato) è dunque

$$\frac{Q}{C}T_n\, y(t) = \frac{Q}{C}T_n \frac{1}{T_n - T_p}(e^{-\frac{t}{T_n}} - e^{-\frac{t}{T_p}})$$

A questo risultato si puo' arrivare anche in altri modi, p.es. con un calcolo direttamente nel dominio del tempo mediante convoluzione dell'impulso di corrente per la risposta impulsiva complessiva di preamplificatore e filtro sbiancante

$$x(t) * \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{T_n}} = \left(Q\frac{1}{T_p}e^{-\frac{t}{T_p}}\right) * \left(\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{T_n}}\right) = \frac{Q}{C}T_n \frac{1}{T_n - T_p}(e^{-\frac{t}{T_n}} - e^{-\frac{t}{T_p}})$$

(B) <u>Filtraggio ottimo</u>

Il filtro con funzione peso w(α) aggiunto dopo il filtro sbiancante produce il (S/N)

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{[segnale]^2}{[rumore]^2} = \frac{\left[Q\frac{T_n}{C}\int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha)w(\alpha)d\alpha\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_B}{2}w^2(\alpha)d\alpha} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2\frac{\left[k_{yw}(0)\right]^2}{\frac{S_B}{2}k_{ww}(0)}$$

Dalle proprietà delle funzioni di correlazione si deduce che la funzione peso $w_{op}(\alpha)$ che produce il massimo (S/N) è

$$w_{op}(\alpha) = y(\alpha)$$

Per cui

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2\frac{\left[k_{yy}(0)\right]^2}{\frac{S_B}{2}k_{yy}(0)} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2\frac{k_{yy}(0)}{\frac{S_B}{2}}$$

la carica minima misurabile (corrispondente a S/N = 1) è

$$Q_{\min} = \frac{C}{T_n}\cdot\frac{S_B^{1/2}}{\sqrt{2k_{yy}(0)}}$$

il numero di elettroni corrispondente (indicando con q=1,6 10-19 Coulomb la carica dell'elettrone)

$$N_{\min} = \frac{Q_{\min}}{q} = \frac{1}{q}\frac{C}{T_n}\cdot\frac{S_B^{1/2}}{\sqrt{2k_{yy}(0)}}$$

Calcoliamo $k_{yy}(0)$

$$k_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(\alpha)d\alpha = \frac{1}{\left(T_n - T_p\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{\alpha}{T_n}} - e^{-\frac{\alpha}{T_p}}\right)^2 d\alpha = \frac{1}{\left(T_n - T_p\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{2\alpha}{T_n}} + e^{-\frac{2\alpha}{T_p}} - 2e^{-\alpha(\frac{1}{T_p}+\frac{1}{T_n})}\right)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\left(T_n - T_p\right)^2}\left(\frac{T_n}{2} + \frac{T_p}{2} - 2\frac{T_nT_p}{T_n + T_p}\right)$$

Mettiamo in evidenza la dipendenza dalla costante di tempo del rumore T_n ponendo $T_p = mT_n$

$$k_{yy}(0) = \frac{1}{\left(T_n - T_p\right)^2}\left(\frac{T_n}{2} + \frac{T_p}{2} - 2\frac{T_n T_p}{T_n + T_p}\right) = \frac{1}{T_n\left(1-m\right)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} - 2\frac{m}{1+m}\right) = \frac{1}{2T_n(1+m)}$$

Ovvero $\quad k_{yy}(0) = \dfrac{1}{2(T_n + T_p)}$

Nel nostro caso con T_p=1 μs e T_n=4 μs si ha m=1/4 e quindi

$$k_{yy}(0) = \frac{1}{2,5 \cdot T_n}$$

E quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{Q^2}{C^2}\frac{T_n}{S_B}\frac{1}{1,25} \qquad \text{ovvero} \qquad \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{Q^2}{C^2}\frac{1}{S_B}\frac{T_n^2}{T_p + T_n}$$

$$Q_{\min} = \frac{C\, S_B^{1/2}}{T_n^{1/2}}\sqrt{1,25} = 2,24 \cdot 10^{-17}\, C \qquad \text{ovvero} \qquad Q_{\min} = C\, S_B^{1/2}\,\frac{\sqrt{T_p + T_n}}{T_n}$$

$$N_{\min} = \frac{Q_{\min}}{q} \approx 140 \; elettroni$$

(C) <u>Casi con diversa costante di tempo T_p dell'impulso esponenziale di corrente</u>

Rispetto al caso visto cambia solo T_p e tutto il resto rimane invariato. Si nota quanto segue.

- Le caratterisiche del rumore sono le stesse, quindi il filtro sbiancante non cambia
- Cambia il segnale all'ingresso del filtro sbiancante, quindi anche il segnale sbiancato y(t) e la sua autocorrelazione $k_{yy}(0)$.
- E' ancora valida l'espressione di y(t) che abbiamo trovato: l'impulso di ingresso rimane un esponenziale e occorre solo considerare un diverso valore di T_p . Possiamo quindi utilizzare i calcoli fatti per capire come cambiano y(t) e Y(ω) al variare di T_p e dedurne le conseguenze.
- al crescere di T_p la salita di y(t) rallenta e il massimo del segnale diminuisce (ricordare che y(t) ha sempre area unitaria).
- al crescere di T_p , fino a che $T_p < T_n$ la banda di rumore del filtro adattato risulta determinata sopratutto da T_n e perciò cambia poco,

- In sintesi, in uscita dal filtro ottimo al crescere di T_p il segnale diminuisce nettamente mentre il rumore diminuisce poco, anzi rimane quasi invariato: ne concludiamo che $(S/N)_{op}$ diminuisce al crescere di T_p .

La dipendenza dl $(S/N)_{op}$ da T_p deriva solo da $k_{yy}(0)$ e nella sezione (B) abbiamo già trovato l'espressione di $k_{yy}(0)$ in funzione del rapporto $m = \frac{T_p}{T_n}$

$$k_{yy}(0) = \frac{1}{2T_n(1+m)}$$

Quindi con essa ricaviamo immediatamente la legge con cui varia il $(S/N)_{op}$ al crescere di T_p .

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2 \frac{k_{yy}(0)}{\frac{S_B}{2}} = \frac{Q^2}{C^2}\frac{T_n}{S_B}\frac{1}{(1+m)}$$

che conferma e precisa la degradazione dedotta intuitivamente .

(D) <u>Approssimazione del filtro adattato con Gated Integrator</u>

Utilizzando invece del filtro adattato un Gated Integrator (GI) con durata TG si ha funzione peso rettangolare

$$w_G(\alpha) = \frac{1}{T_G} \qquad \text{per } 0 < \alpha < T_G \qquad \text{e} \qquad w(\alpha)=0 \text{ altrove}$$

e quindi autocorrelazione

$$k_{ww}(0) = \frac{1}{T_G}$$

La durata T_G va scelta in modo che il rettangolo rappresenti una buona approssimare della funzione peso ottimale e cioè del segnale sbiancato normalizzato y(α) già visto nella sezione (B). Una stima approssimata si può fare anche solo confrontando visualmente i due grafici: appare appare consigliabile una durata T_G maggiore della costante di tempo del rumore T_n , ma non di molto, cioè una scelta di T_G nel campo

$$1{,}5T_n < T_G < 2{,}5T_n$$

Trattando con il GI l'uscita del filtro sbiancante (che porta segnale $\frac{Q}{C}T_n\, y(t)$ e rumore bianco con densità unilatera S_B) si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{GI} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2 \frac{\left[k_{yw}(0)\right]^2}{\frac{S_B}{2}k_{ww}(0)} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2 \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha)w_G(\alpha)d\alpha\right]^2}{\frac{S_B}{2T_G}} =$$

$$= \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2 \frac{\left[\int_0^{T_G} y(\alpha)\frac{1}{T_G}d\alpha\right]^2}{\frac{S_B}{2T_G}} = \left(Q\frac{T_n}{C}\right)^2 \frac{\left[\int_0^{T_G} \frac{1}{T_n - T_p}\left(e^{-\frac{\alpha}{T_n}} - e^{-\frac{\alpha}{T_p}}\right)\frac{1}{T_G}d\alpha\right]^2}{\frac{S_B}{2T_G}} =$$

$$= \frac{Q^2}{C^2}\frac{T_n}{S_B}\frac{2T_n}{T_G}\left(\frac{T_n}{T_n - T_p}\right)^2 \left[\left(1 - e^{-\frac{T_G}{T_n}}\right) - \frac{T_p}{T_n}\left(1 - e^{-\frac{T_G}{T_p}}\right)\right]^2$$

Ovvero ponendo $T_p = mT_n$

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{GI} = \frac{Q^2}{C^2}\frac{T_n}{S_B}\frac{2T_n}{T_G}\left(\frac{1}{1-m}\right)^2 \left[\left(1 - e^{-\frac{T_G}{T_n}}\right) - m\left(1 - e^{-\frac{T_G}{mT_n}}\right)\right]^2$$

Nel nostro caso m=1/4 e quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{GI} = \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{T_n}{S_B}\frac{32}{9}\frac{T_n}{T_G}\left[\left(1 - e^{-\frac{T_G}{T_n}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-4\frac{T_G}{T_n}}\right)\right]^2$$

Scegliendo $T_G = 2T_n = 8\mu s$ si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{GI} = \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{T_n}{S_B}\cdot\frac{32}{9}\cdot\frac{1}{2}\left[\left(1 - e^{-2}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-8}\right)\right]^2 = \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{T_n}{S_B}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 0,378 =$$

$$= \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{T_n}{S_B}\cdot 0,672 = \left(\frac{Q}{C}\right)^2 \frac{T_n}{S_B}\cdot\frac{1}{1,488}$$

Che rispetto all'ottimo risulta inferiore per un fattore

$$\frac{1,25}{1,488} = 0,84$$

e si ha quindi

$$Q_{\min} = \frac{C\,S_B^{1/2}}{T_n^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{0,672}} = \frac{C\,S_B^{1/2}}{T_n^{1/2}}\sqrt{1,488} = 2,44\cdot 10^{-17}C$$

$$N_{\min} = \frac{Q_{\min}}{q} \approx 153 \; elettroni$$

Che rispetto all'ottimo risulta maggiore per un fattore

$$\frac{153}{140} = 1,092 = \sqrt{\frac{1}{0,84}}$$

Si verificano inoltre risultati meno buoni

sia con $T_G = 2,5 \cdot T_n = 10\mu s$

che con $T_G = 1,5 \cdot T_n = 6\mu s$

confermando che la scelta $T_G = 2 \cdot T_n = 8\mu s$ è nella zona del massimo,