PROBLEMA 1

Quadro dei dati

- Impulso di tensione con forma di semionda di coseno, durata T_p , ampiezza A

  cioè $Ax(t)$ con $x(t) = \cos(\pi \frac{t}{T_p})$ per $-\frac{T_p}{2} < t < \frac{T_p}{2}$ con $T_p = 2\mu s$

- Densità unilatera di rumore bianco $\sqrt{S_b} = 20\, nV / \sqrt{Hz}$,

  corrispondente a densità bilatera $\sqrt{S_{bb}} = \sqrt{S_b / 2} \approx 14\, nV / \sqrt{Hz}$

- Per la domanda (D) :

  componente di rumore 1/f con frequenza caratteristica d'angolo f_c = 90 kHz

  azzeramento della linea di base circa T≈300s (≈5 minuti) prima delle misure su impulsi

- Per la domanda (E):

  sequenza di impulsi uguali con frequenza di ripetizione p che varia tra 1 kHz e 2 KHz; l'ampiezza A degli impulsi varia lentamente, cioè si rilevano variazioni sensibili su tempi più lunghi di 1 s.

(A) Filtraggio ottimo

Con rumore bianco il filtraggio ottimo ha funzione peso $w_{op}(t) \propto x(t)$

Rapporto S/N ottimo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{\left[A \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(\alpha) w_{op}(\alpha) d\alpha\right]^2}{S_{bb} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} w^2_{op}(\alpha) d\alpha} = \frac{A^2 \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x^2(\alpha) d\alpha}{S_{bb}}$$

dove

$$\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x^2(\alpha) d\alpha = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_p}\alpha\right) d\alpha = 2\int_{0}^{T_p/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_p}\alpha\right) d\alpha = \frac{T_p}{2}$$

e quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{A^2 T_p}{2 S_{bb}} = \frac{A^2 T_p}{S_b}$$

da cui si ricava la minima ampiezza misurabile $A_{min,op}$, corrispondente a (S/N)=1

$$A_{\min,op} = \sqrt{\frac{2S_{bb}}{T_p}} = \frac{S_b^{1/2}}{\sqrt{T_p}} = 14\mu V$$

Osservazioni preliminari al filtraggio con gated integrator

- Il S/N e quindi l'ampiezza minima $A_{min,G}$ ottenibili **NON dipendono** dal guadagno in continua del circuito GI, perciò le valutazioni si possono fare considerando GI con qualsiasi guadagno.
- Tuttavia il confronto tra casi con diversi valori di T_G risulta più facile e diretto considerando un GI con guadagno in continua unitario, cioè con funzione peso w_G normalizzata

  $w_G(t) = \dfrac{1}{T_G}$ per $-T_G < t < T_G$ e nulla altrove. Infatti con tale w_G si ha semplicemente:

  rumore in uscita dal GI: $\overline{n_G^2} = S_{bb}\dfrac{1}{T_G}$.

  segnale in uscita dal GI: u_G = valor medio in T_G del segnale in ingresso =
  = (1/ T_G) · (area del segnale di ingresso nell'intervallo T_G)

(B) GI con tempo di integrazione uguale alla durata dell'impulso $T_G = T_p$

segnale in uscita
$$u_{G,Tp} = \int_{-\frac{T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} \frac{1}{T_p} A\cos(\pi\frac{\alpha}{T_p})d\alpha = A\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(\pi\beta)d\beta = \frac{2}{\pi}A$$

Rapporto S/N
$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{G,Tp} = \frac{u^2_{G,Tp}}{\overline{n^2_{G,Tp}}} = A^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{T_p}{S_{bb}} = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 A^2\frac{T_p}{2S_{bb}} = \frac{8}{\pi^2}A^2\frac{T_p}{S_b}$$

con riduzione rispetto all'ottimo
$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{G,Tp} = \frac{8}{\pi^2}A^2\frac{T_p}{S_b} = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = 0,81\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op}$$

Ampiezza minima misurabile
$$A_{\min,Gp} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S_{bb}}{T_p}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2S_{bb}}{T_p}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{S_b^{1/2}}{\sqrt{T_p}}$$

con aumento rispetto all'ottimo
$$A_{\min,Gp} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{S_b^{1/2}}{\sqrt{T_p}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}A_{\min,op} = 1,11\,A_{\min,op} = 15,5\mu V$$

(C) <u>GI con tempo di integrazione TG diverso della durata dell'impulso Tp.</u>

<u>Considerazioni preliminari intuitive</u>

- $T_G > T_p$ non va bene, fa diminuire il S/N in quanto:
  a) il segnale in uscita (valor medio su T_G del segnale in ingresso) diminuisce come $1/T_G$
  b) il rumore in uscita diminuisce come $1/\sqrt{T_G}$, quindi diminuisce meno del segnale
- con integrazione più breve del segnale $T_G < T_p$, per utilizzare al meglio il segnale (che è simmetrico rispetto al massimo) occorre posizionare l'intervallo T_G centrato sul massimo

<u>(C1) Analisi quantitativa.</u>

In uscita dal GI si ha

segnale in uscita
$$u_G = \int_{-\frac{T_G}{2}}^{\frac{T_G}{2}} \frac{1}{T_G} A\cos(\pi\frac{\alpha}{T_p})d\alpha = 2A\frac{1}{T_G}\int_0^{\frac{T_G}{2}}\cos(\pi\frac{\alpha}{T_p})d\alpha = A\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}}$$

rumore in uscita
$$\overline{n_G^2} = S_{bb}\frac{1}{T_G}$$

rapporto S/N
$$\left(\frac{S}{N}\right)_G^2 = \frac{u_G^2}{\overline{n_G^2}} = A^2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)^2}\frac{1}{S_{bb}\frac{1}{T_G}} = A^2\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}\frac{2}{\pi}\frac{T_p}{S_{bb}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}\frac{4}{\pi}A^2\frac{T_p}{S_b}$$

Si nota che:

- per $T_G = T_p$ si ritrova il risultato ottenuto in (B).
- Si ha una riduzione del S/N rispetto all'ottimo data da

$$\left(\frac{S}{N}\right)_G^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}\frac{4}{\pi}A^2\frac{T_p}{S_b} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}\frac{4}{\pi}\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2$$

Definiamo il parametro $\gamma = \frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}$ e cerchiamo il massimo di S/N in funzione di γ

$$\left(\frac{S}{N}\right)_G^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{T_G}{T_p}\right)}\frac{4}{\pi}\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 = \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}\frac{4}{\pi}\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2$$

Il massimo della funzione $g = \frac{\sin^2\gamma}{\gamma}$ si può individuare calcolando numericamente la funzione per punti, oppure individuando con calcoli numerici il valore di γ_{max} per cui

$$\frac{dg}{d\gamma} = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\gamma} - \frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2} = 0 \qquad \text{cioè per cui} \qquad tg\gamma = 2\gamma$$

Si trova $\gamma_{max} = 1{,}165$ corrispondente a $T_G = \gamma_{max}\frac{2}{\pi}T_p = 0{,}74\, T_p$

e quindi $g_{max} = \frac{\sin^2\gamma_{max}}{\gamma_{max}} = \frac{\sin^2(1{,}165)}{1{,}165} = 0{,}725$

da cui si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{G,max}^2 = \frac{\sin^2\gamma_{max}}{\gamma_{max}}\frac{4}{\pi}\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 = 0{,}725\cdot\frac{4}{\pi}\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2 = 0{,}923\left(\frac{S}{N}\right)_{op}^2$$

ovvero

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{G,max} = \sqrt{\frac{\sin^2\gamma_{max}}{\gamma_{max}}}\sqrt{\frac{4}{\pi}}A\frac{\sqrt{T_p}}{S_b^{1/2}} = \sqrt{\frac{4\cdot 0{,}725}{\pi}}A\frac{\sqrt{T_p}}{S_b^{1/2}} = 0{,}96\cdot A\frac{\sqrt{T_p}}{S_b^{1/2}} = 0{,}96\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_{op}$$

In queste condizioni l'ampiezza minima misurabile è

$$A_{min,G\max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\gamma_{max}}{\gamma_{max}}}}\sqrt{\frac{\pi}{4}}\frac{S_b^{1/2}}{\sqrt{T_p}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\gamma_{max}}{\gamma_{max}}}}\sqrt{\frac{\pi}{4}}A_{min,op} = 1{,}041\, A_{min,op} = 14{,}6\mu V$$

In sintesi abbiamo trovato che

(a) con T_G più breve della durata del segnale T_p si ottiene un incremento del S/N e una corrispondente riduzione dell'ampiezza minima,

(b) il miglior risultato si ha per $T_G = 0{,}74\ T_p$ con cui si ottiene un miglioramento di circa il 7% dell'ampiezza minima misurabile rispetto al caso $T_G = T_p$.

<u>(C2) Confronto con il caso di segnale rettangolare (ampiezza A costante in T_p).</u>

segnale in uscita $\quad u_G = \int_{-\frac{T_G}{2}}^{\frac{T_G}{2}} \frac{A}{T_G} d\alpha = A \quad$ costante

rumore in uscita $\quad \overline{n_G^2} = S_{bb} \frac{1}{T_G} \quad$ aumenta al diminuire di T_G

rapporto S/N $\quad \left(\frac{S}{N}\right)_G^2 = \frac{u_G^2}{\overline{n_G^2}} = A^2 \frac{T_G}{S_{bb}} \quad$ diminuisce al diminuire di T_G

Dunque in questo caso (segnale di ampiezza costante in T_p) la conclusione è opposta al caso precedente (C1): utilizzare $T_G < T_p$ peggiora il S/N rispetto a quello ottenuto con $T_G = T_p$.

Il confronto tra i due casi mette in evidenza la ragione per cui invece nel caso precedente (C1) il S/N migliora riducendo T_G . Il valor medio del segnale a semionda di coseno nell'intervallo T_G aumenta al diminuire di T_G perchè il segnale parte da zero agli estremi e ha ampiezza crescente verso il centro. Si può stimare intuitivamente che, iniziando con $T_G = T_p$ e dando una piccola riduzione a T_G , la diminuzione dell'integrale del segnale risulta trascurabile e quindi il valor medio aumenta come $1/T_G$, quindi più rapidamente del rumore che cresce come $\sqrt{1/T_G}$.

(D) <u>Filtraggio in presenza di rumore 1/f con GI avente $T_G = T_p$</u>

<u>(D1) Rumore 1/f limitato solo dall'azzeramento della linea di base</u>

L'azzeramento della linea di base circa $T \approx 300s$ ($\approx$5 minuti) prima delle misure su impulsi dà un filtraggio passalto con frequenza di taglio $f_{i,z} = 1/2\pi T \approx 5 \cdot 10^{-4}\ Hz$

Il successivo filtraggio passabasso dato dal GI ha frequenza di taglio

$$f_S = \frac{1}{2T_G} = \frac{1}{2T_p} = 250 kHz$$

In queste condizioni il contributo di rumore 1/f in uscita dal GI è

$$\overline{n_{f,z}^2} \approx 2\,S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_{i,z}}\right) = 2\,S_B f_C \ln\left(5\cdot 10^8\right) \approx 40 S_B f_C$$

che rispetto al rumore bianco $\overline{n_B^2} \approx S_B f_S$ risulta maggiore di un fattore

$$\frac{\overline{n_{f,z}^2}}{\overline{n_B^2}} \approx 2\frac{f_C}{f_S}\ln\left(\frac{f_S}{f_{i,z}}\right) \approx 40\frac{f_C}{f_S} \approx 7,2$$

In queste condizioni il rumore 1/f risulta dominante

<u>(D2) Rumore 1/f limitato da filtro passa-alto a parametri costanti</u>

Cerchiamo di ridurre il rumore 1/f a livello del rumore bianco introducendo **<u>prima del GI</u>** un filtro passa-alto CR a parametri costanti, con costante di tempo $T_F = RC$ e frequenza di taglio

$$f_i = \frac{1}{2\pi T_F}$$

in queste condizioni in uscita dal GI il rumore bianco vale (essendo $f_i << f_S$)

$$\overline{n_B^2} \approx S_B f_S$$

e il contributo di rumore 1/f vale

$$\overline{n_f^2} \approx S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)$$

Per ridurlo a livello del rumore bianco occorre una frequenza di taglio f_i tale che

$$f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right) = f_S$$

Pertanto, con i valori dati di f_C e f_s risulta necessario usare

$$f_i = \frac{f_s}{16} \approx 15,5kHz$$

Per avere questa frequenza di taglio il filtro passa-alto CR deve avere costante di tempo

$$T_F = RC = \frac{1}{2\pi f_i} \approx 10,6\mu s$$

Essendo a parametri costanti, il differenziatore CR filtra anche il segnale e dato il valore di f_i ne riduce l'ampiezza in misura significativa, tale da ridurre in eguale misura il S/N. L'effetto si può valutare sia ragionando nel dominio della frequenza che in quello del tempo.
Ragionando in frequenza si nota che il segnale impulsivo di durata T_p ha spettro esteso dalla continua fino a un limite di banda superiore circa eguale a $f_s \approx 1/2T_p$ e il filtro CR ne taglia una frazione valutabile circa $f_i / f_s = 0{,}06$. Il successivo filtro passabasso (GI) quindi riceve il segnale con spettro ridotto di questa frazione e produce in uscita un segnale corrispondentemente ridotto.
Ragionando nel tempo si nota che l'azione del filtro CR è quella di un differenziatore approssimato con costante di tempo T_F non molto maggiore della durata dell'impulso $T_F = 10,6\mu s \approx 5T_p$, pertanto il GI riceve e integra un impulso con ampiezza sensibilmente ridotta.

In conclusione, un filtro passa-alto a parametri costanti non risulta adatto allo scopo nel caso qui considerato.

<u>(D3) Rumore 1/f limitato da filtro passa-alto a parametri variabili nel tempo</u>

Per ridurre il contributo del rumore 1/f a livello di quello del rumore bianco occorre un filtraggio passa-alto che applichi il taglio f_i al rumore senza applicarlo al segnale e questo si può ottenere con filtri lineari a parametri variabili.

Utilizziamo un BaseLine Restorer (BLR) inserito prima del GI, cioè un passa-alto CR con resistenza commutata da uno switch e quindi costante di tempo di differenziazione commutata. Al di fuori dell'intervallo T_p occupato dal segnale si ha costante di differenziazione $T_F = RC$ (come nel passaalto a parametri costanti), ma nell'intervallo T_p lo switch si apre rendendo $R \to \infty$ e quindi $T_F \to \infty$, cioè sospendendo l'azione di differenziazione.

Usiamo per la costante di tempo di differenziazione del BLR lo stesso valore calcolato per il filtro passaalto a parametri costanti $T_F = 10,6\mu s \approx 5T_p$ ottenendo quindi la stessa frequenza di taglio passaalto per il rumore 1/f

$$f_i = \frac{1}{2\pi T_F} \approx 15,5kHz$$

In uscita dal GI (che opera il filtraggio passabasso con frequenza di taglio f_S) il contributo del rumore 1/f con il dimensionamento detto risulta circa eguale a quello del rumore bianco

$$\overline{n_f^2} \approx S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right) \approx S_B f_S$$

Per quanto sopra detto, il BLR non produce alcuna riduzione del segnale, quindi si evita l'inconveniente visto con il passa-alto a parametri costanti e l'obiettivo è raggiunto.

(E) <u>Filtraggio con impulsi ripetitivi</u>

Si può sfruttare la ridondanza di informazione data dalla sequenza di impulsi eguali utilizzando un boxcar integrator invece del gated integrator. Esso unisce al filtraggio dato dalla integrazione sull'intervallo T_p un ulteriore filtraggio dato dalla media esponenziale con ragione

$$r = e^{-\frac{T_p}{T_b}}$$

Il risultato ottenuto con il boxcar NON dipende dalla frequenza di ripetizione degli impulsi e quindi le variazioni di questa frequenza non rappresentano un problema. Tuttavia l'ampiezza degli impulsi è costante solo su tempi entro 1 s , pertanto il boxcar va dimensionato in modo che la media venga fatta sugli impulsi disponibili entro 1 s e non oltre. Per questo occorre sia trascurabile il peso dato agli impulsi arrivati oltre 1 s prima dell'istante di lettura dell'uscita del boxcar. Dato che il tasso varia da 1000 a 2000 impulsi/s occorre utilizzare non più di 1000 impulsi. Numerando gli impulsi a partire dall'ultimo arrivato, il peso dato allo N-esimo è

$$w_N = r^N = e^{-N\frac{T_p}{T_b}}$$

Consideriamo trascurabile un peso se inferiore a 1/100. Quindi per avere peso trascurabile oltre il 1000esimo impulso occorre avere

$$w_{1000} = r^{1000} = e^{-1000\frac{T_p}{T_b}} \leq \frac{1}{100}$$

cioè occorre scegliere per il boxcar

$$T_b \leq \frac{1000\,T_p}{\ln 100} = 217\,T_p = 434\mu s$$

A cui corrisponde una ragione della progressione

$$r = e^{-\frac{T_p}{T_b}} = e^{-\frac{1}{217}} \approx 1 - \frac{1}{217} = 1 - 0,0046$$

Effettuando la media esponenziale con ragione r in condizioni di rumore bianco si aumenta il S/N del fattore

$$\sqrt{\frac{(1-r)^2}{1-r^2}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = 20,8$$

e di conseguenza si migliora di altrettanto l'ampiezza minima misurabile

$$A_{\min,Bp} = A_{\min,Gp}\sqrt{\frac{1-r}{2}} = \frac{A_{\min,Gp}}{20,8} = 0,74\mu V$$