PROBLEMA 1

Quadro dei dati

- R_L = 200 MΩ resistenza di carico
- C_L = 5 pF capacità totale di carico
- segnale di corrente dal rivelatore a impulso rettangolare con durata $T_p = 10\ \mu s$ ampiezza I_D
- $S_v^{1/2}$ = 10 nV/Hz$^{1/2}$ densita' efficace unilatera di rumore di tensione
- $S_i^{1/2}$ = 0,05 pA/Hz$^{1/2}$ densita' efficace unilatera di rumore di corrente
- Disturbo indotto da interferenza a radiofrequenza all'uscita del preamplificatore: segnale spurio sinusoidale con frequenza f_r =80 KHz e ampiezza $V_r \approx 400\mu V$

A) Filtraggio ottimo

Rumore totale di tensione in uscita dal preamp

$$S_T = S_v + S_i \frac{R_L^2}{1+\omega^2 R_L^2 C_L^2} \approx S_v + S_i \frac{1}{\omega^2 C_L^2}$$

considerando $R_L \to \infty$ e quindi $R_L C_L \to \infty$ si può approssimare

$$S_T \approx S_v + S_i \frac{1}{\omega^2 C_L^2}$$

La frequenza caratteristica a cui le due componenti di rumore sono eguali è individuata da

$$\omega_{nc} = \frac{\sqrt{S_i}}{C_L\sqrt{S_v}} = 1\, Mrad/s \qquad \text{cioè dalla costante di tempo} \qquad T_{nc} = \frac{C_L\sqrt{S_v}}{\sqrt{S_i}} = 1\mu s$$

Scrivendo

$$S_T \approx S_v + S_i \frac{1}{\omega^2 C_L^2} = S_v \frac{1+\omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$$

si mette in evidenza che lo spettro di rumore ha un polo a $\omega = 0$ e uno zero a $\omega = \omega_{nc}$.

A1 - Filtro sbiancante

Il filtro "sbiancante" che opera sull'uscita del preamp è un filtro a parametri costanti che ha uno zero che cancella il polo del rumore a $\omega = 0$ e un polo che cancella lo zero a $\omega = \omega_{nc}$. Si tratta di un derivatore approssimato con costante di tempo T_{nc} e quindi con funzione di trasferimento

$$H_B = \frac{sT_{nc}}{1+sT_{nc}} \qquad \text{e quindi} \qquad \left|H_B\right|^2 = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

All'uscita del filtro sbiancante abbiamo quindi un rumore bianco

$$\left|H_B\right|^2 S_T = S_v \qquad \text{(unilatera, corrispondente a densità bilatera } S_{vb} = S_v / 2 \text{)}$$

e un segnale V che deriva dal segnale di corrente I del rivelatore passato prima attraverso l'integrazione data dalla capacità C_L e poi attraverso il filtro sbiancante

$$V = I \frac{1}{sC_L} \frac{sT_{nc}}{1+sT_{nc}} = \frac{I\, T_{nc}}{C_L} \frac{1}{1+sT_{nc}}$$

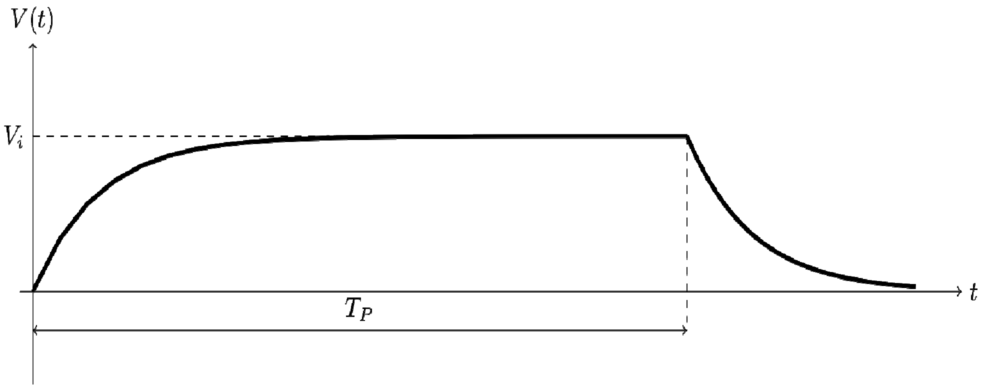
Il segnale I è rettangolare

$$I = \frac{I_D}{s}\left(1-e^{-sT_P}\right)$$

pertanto si ha

$$V = \frac{I_D\, T_{nc}}{C_L} \frac{1}{s} \frac{1}{1+sT_{nc}}\left(1-e^{-sT_P}\right) = V_i \frac{1}{s} \frac{1}{1+sT_{nc}}\left(1-e^{-sT_P}\right) \qquad \text{avendo posto} \qquad V_i = \frac{I_D T_{nc}}{C_L}$$

Dunque il filtro sbiancante ha cancellato il polo di integrazione a $s=0$ (dovuto a C_L) e vi ha sostituito il polo di integrazione approssimata a $s=1/T_{nc}$. Dato che la durata T_P dell'impulso di corrente rettangolare è molto maggiore della costante di tempo T_{nc} , la forma dell'impulso V è quasi rettangolare, con fronte esponenziale di salita che si completa prima della fine dell'impulso e fronte esponenziale di discesa.



$V(t) = V_i \; x(t)$ in cui $x(t) = 1(t) \left[1 - e^{-\frac{t}{T_{nc}}} \right]$ per $0<t<T_P$ e

$x(t) = 1(t - T_P) \; e^{-\frac{t}{T_{nc}}}$ per $T_P < t$

NOTA: trattando il caso senza la approssimazione $R_L \to \infty$ si ricava la stessa forma d'onda di segnale "sbiancato". Infatti considerando R_L finita lo spettro di rumore risulta avere un polo a $\omega = 1/R_L C_L = 1krad/s$ (invece che a $\omega = 0$) e uno zero a $\omega = \omega_{nc} \approx 1Mrad/s$ (praticamente invariata se $R_L C_L \gg T_{nc}$). Di conseguenza va modificato il filtro sbiancante, portando il suo zero a $\omega = 1/R_L C_L = 1krad/s$ e lasciando praticamente invariato il suo polo a $\omega = \omega_{nc} \approx 1Mrad/s$. Anche in questo caso il filtro sbiancante cancella l'integrazione del segnale di corrente dovuta a C_L (in questo caso una integrazione approssimata con costante di tempo $R_L C_L$) e vi sostituisce una integrazione approssimata con costante di tempo T_{nc} , per cui si conferma la forma d'onda di uscita già vista.

A2 - Filtro adattato

Con rumore bianco il filtraggio adattato ha funzione peso $w_{op}(t) \propto x(t)$

Rapporto S/N ottimo: $$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{\left[V_i k_{xw}(0)\right]^2}{S_{vb} k_{ww}(0)} = \frac{V_i^2 k_{xx}^2(0)}{S_{vb}} = \frac{V_i^2}{S_{vb}} \int_0^\infty x^2(\alpha)\, d\alpha$$

Dove $$\int_0^\infty x^2(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{T_p} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{T_{nc}}}\right)^2 d\alpha + \int_0^\infty e^{-\frac{2\beta}{T_n}} d\beta = T_p - T_{nc}$$

Quindi $$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} = \frac{V_i^2}{S_{vb}}\left(T_p - T_{nc}\right) = \frac{V_i^2}{S_v} 2\left(T_p - T_{nc}\right)$$

La minima ampiezza misurabile del segnale di tensione all'uscita del filtro sbiancante è

$$V_{i\min,op} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2\left(T_p - T_{nc}\right)}} = 2,35\mu V$$

Tenendo conto che $V_i = \dfrac{I_D T_{nc}}{C_L}$ si ricava la minima ampiezza del segnale di corrente del rivelatore misurabile con filtraggio ottimo

$$I_{D\min,op} = \frac{C_L}{T_{nc}} V_{i\min,op} = \frac{C_L}{T_{nc}} \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2\left(T_p - T_{nc}\right)}} = 11,8\ pA$$

B) Filtraggio con Gated Integrator con TG=Tp come approssimazione del filtro adattato

La funzione peso del GI (normalizzato a guadagno unitario) è

$w = \dfrac{1}{T_G}$ per $0 < t < T_G = T_p$ (e $w=0$ altrove)

e con essa si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_G = \frac{\left[V_i k_{xw}(0)\right]^2}{S_{vb} k_{ww}(0)} = \frac{V_i^2}{S_{vb}} \frac{k_{xw}^2(0)}{k_{ww}(0)} = \frac{V_i^2}{S_{vb}} T_G k_{xw}^2(0)$$

Dove $$k_{xw}(0) = \int_0^{T_p} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{T_{nc}}}\right) \frac{1}{T_G} d\alpha = \frac{1}{T_G}\left(T_p - T_{nc}\right)$$

Per cui $$\left(\frac{S}{N}\right)^2_G = \frac{V_i^2}{S_{vb}} T_G k_{xw}^2(0) = \frac{V_i^2}{S_{vb}} \frac{1}{T_G}\left(T_p - T_{nc}\right)^2 = \frac{V_i^2}{S_v} 2\left(T_p - T_{nc}\right)\left(1 - \frac{T_{nc}}{T_p}\right)$$

si ha quindi

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_G = \frac{V_i^2}{S_{vb}}\left(T_p - T_{nc}\right)\left(1 - \frac{T_{nc}}{T_p}\right) = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op}\left(1 - \frac{T_{nc}}{T_p}\right) = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot 0,9$$

Con questo filtraggio l'ampiezza minima misurabile in termini ditensione all'uscita del filtro sbiancante è

$$V_{i\min,G} = V_{i\min,op} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{T_{nc}}{T_p}\right)}} = \frac{S_v^{1/2}}{\sqrt{2\left(T_p - T_{nc}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{T_{nc}}{T_p}\right)}} = \frac{2,35}{\sqrt{0,9}}\,\mu V = 2,48\,\mu V$$

e in termini di corrente del rivelatore è

$$I_{D\min,G} = I_{D\min,op} \frac{1}{\sqrt{0,9}} = 13,1\ pA$$

C) Miglioramento del filtraggio ottenibile spostando l'inizio della integrazione con Gated Integrator e mantenendo costante TG=Tp

Mantenendo costante la durata T_G dell'integrazione e spostandola nel tempo il risultato del filtraggio sul rumore rimane costante

$$\overline{n_G^2} = S_v \frac{1}{2T_G}$$

Cambia invece il risultato del filtraggio sul segnale, dunque se il segnale in uscita dal GI aumenta anche il S/N aumenta. Riportiamo sulla figura del segnale i limiti dell'intervallo di integrazione T_G , partendo dalla situazione considerata in (B) (inizio di T_G coincidente con l'inizio dell'impulso) e osserviamo come evolve la situazione mentre spostiamo in ritardo i limiti a piccoli passi Δt . Ad ogni passo Δt l'integrazione perde una "fettina" Δt del fronte di salita iniziale e guadagna una "fettina" Δt del fronte di discesa finale. Pertanto l'integrale del segnale aumenta se e fino a quando la fettina guadagnata è maggiore di quella perduta. Dalla figura risulta evidente che vi è ad ogni passo un aumento fino al punto in cui l'inizio dell'integrazione corrisponde all'istante in cui il fronte di salita del segnale raggiunge ampiezza metà di quella finale.

D) Modifica del filtraggio con GI per ridurre un disturbo a radiofrequenza

Il filtro sbiancante (differenziatore approssimato) con polo a

$$f_{nc} = \frac{1}{2\pi T_{nc}} \approx 160\ kHz$$

attenua il segnale spurio a frequenza f_r circa del fattore $\frac{f_r}{f_{nc}} = 0,5$

Il GI produce ulteriore attenuazione

$$\frac{\sin\left(\pi f_r T_G\right)}{\pi f_r T_G} = \frac{\sin\left(\pi \cdot 0,8\right)}{\pi \cdot 0,8} \approx 0,24$$

Pertanto l'ampiezza del disturbo acquisita dal GI risulta

$$V_r \cdot \frac{f_r}{f_{nc}} \cdot \frac{\sin\left(\pi f_r T_G\right)}{\pi f_r T_G} \approx V_r \cdot 0,5 \cdot 0,24 \approx 50 \mu V \gg V_{i\min,G}$$

ed è ancora molto maggiore dell'ampiezza minima misurabile permessa dal rumore.

Possiamo ridurre drasticamente l'effetto della interferenza modificando la durata del gate T_G in modo da fare coincidere il primo zero della sua funzione peso con la frequenza f_r del segnale di interferenza, cioè utilizzando

$$T_G = \frac{1}{f_r} = 12,5\ \mu s > T_p$$

Valutiamo l'effetto di questa modifica sul S/N

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{Gm} = \frac{V_i^2}{S_{vb}} \frac{k_{xw}^2(0)}{k_{ww}(0)} = \frac{V_i^2}{S_{vb}} T_G k_{xw}^2(0) = \frac{V_i^2}{S_v} 2 T_G k_{xw}^2(0)$$

dove ora si ha

$$k_{xw}(0) = \int_0^{T_p} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{T_{nc}}}\right) \frac{1}{T_G} d\alpha + \int_0^{T_G - T_p} e^{-\frac{\beta}{T_n}} d\beta = \frac{1}{T_G}\left(T_p - T_{nc}\right) + \frac{T_{nc}}{T_G}\left(1 - e^{-\frac{T_G - T_p}{T_{nc}}}\right) = \frac{1}{T_G}\left(T_p - T_{nc} e^{-\frac{T_G - T_p}{T_{nc}}}\right)$$

Quindi si ricava

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{Gm} = \frac{V_i^2}{S_v} 2 T_G k_{xw}^2(0) = \frac{V_i^2}{S_v} 2 \frac{1}{T_G} \left(T_p - T_{nc} e^{-\frac{T_G - T_p}{T_{nc}}}\right)^2$$

Che possiamo confrontare con il filtraggio ottimo

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{Gm} = \frac{V_i^2}{S_v} 2\left(T_p - T_{nc}\right) \frac{\left(T_p - T_{nc} e^{-\frac{T_G - T_p}{T_{nc}}}\right)^2}{T_G\left(T_p - T_{nc}\right)} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \frac{\left(T_p - T_{nc} e^{-\frac{T_G - T_p}{T_{nc}}}\right)^2}{T_G\left(T_p - T_{nc}\right)} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot 0,88$$

Notiamo che rispetto al caso di integrazione con durata eguale all'impulso $T_G = T_p$, questo S/N risulta solo di poco inferiore:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2_{Gm} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot 0,88 \qquad \text{invece di} \qquad \left(\frac{S}{N}\right)^2_{G} = \left(\frac{S}{N}\right)^2_{op} \cdot 0,9$$