

PROBLEMA 1

Quadro dei dati

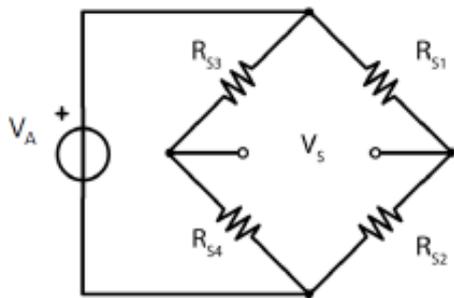
Sensore resistivo

Potenza max dissipabile $P_d < 20\mu W$

Valore di riferimento a riposo $R_{S0} = 200 \Omega$

variazioni di resistenza ΔR_S piccole $10^{-6} < \Delta R_S / R_{S0} < 10^{-2}$ e lente su tempi 10s

Configurazione a ponte di Wheatstone con resistenze uguali



sensore variabile R_{S2}

altre resistenze costanti uguali a R_{S0} : $R_{S1} = R_{S3} = R_{S4} = R_{S20} = 200 \Omega$

Preamplificatore differenziale

Limite di banda $f_{pa} = 10 \text{ MHz}$

densità di rumore

$S_v^{1/2} = 80 \text{ nV/Hz}^{1/2}$ bianca (unilatera) più componente $1/f$ con $f_c = 1 \text{ kHz}$

$S_i^{1/2} = 1 \text{ pA/Hz}^{1/2}$ bianca (unilatera) più componente $1/f$ con $f_c = 1 \text{ kHz}$

(A) Misura con tensione di alimentazione continua V_A

Potenza dissipata nel sensore

$$\left(\frac{V_A}{2}\right)^2 \frac{1}{R_{S0}} < P_{d\max} = 20\mu W \quad \text{deve essere} \quad V_A < 2\sqrt{P_{d\max} R_{S0}} = 126mV$$

Utilizziamo $V_A = 120 \text{ mV}$.

Tensione di uscita del ponte prodotta da variazione ΔR_S del sensore che sbilancia il ponte

$$V_S = \frac{V_A}{4} \cdot \frac{\Delta R_S}{R_{S0}} = 30mV \cdot \frac{\Delta R_S}{R_{S0}}$$

cioè una variazione $\Delta R_S/R_{S0} = 10^{-3}$ produce una variazione di tensione $\Delta V_S = 30\mu V$

Trascurabile contributo del rumore di corrente del preamp rispetto a quello di tensione data la bassa resistenza di sorgente $R_S = 200\Omega$ (resistenza di uscita del ponte)

$$R_S^2 S_i = 4 \cdot 10^{-20} V^2 / Hz \ll S_v = 6,4 \cdot 10^{-15} V^2 / Hz$$

Trascurabile anche il rumore della resistenza del ponte

$$\sqrt{4kTR_s} = 1,8 nV / \sqrt{Hz} \ll 80 nV / \sqrt{Hz}$$

Il rumore da tener in conto è praticamente il rumore di tensione del preamp

$$S_T = S_v + R_S^2 S_i + 4kTR_s \approx S_v$$

Il segnale dal ponte è una tensione continua (varia su tempi $>10s$), che rimane tale passando attraverso il preamp e un successivo filtro passabasso.

L'ampiezza del segnale continuo si può misurare direttamente con un voltmetro per continua (DC voltmeter).

A1) Misura senza filtraggio passabasso

Si può effettuare la misura anche senza alcun filtraggio passabasso, utilizzando solo un filtraggio passa-alto per limitare il rumore $1/f$ del preamp evitando che diverga. Occorre però che questo filtraggio non tagli anche il segnale quasi continuo da misurare, perciò non va bene un filtro passa-alto CR a parametri costanti. Si può invece utilizzare un azzeramento periodico della linea di base per ottenere un filtraggio tipo "correlated double sampling CDS". Si interrompe la misura ogni T secondi per un breve intervallo durante il quale si cortocircuitano i morsetti di ingresso del preamp e si azzerano la linea di base dell'uscita del preamp (oppure la si memorizza per poi sottrarla dalle successive misure). Così si ottiene una frequenza di taglio passa-alto $f_i \approx 1/T Hz$. Utilizzando non più di un minuto per svolgere l'operazione di azzeramento, si può procedere facendo un azzeramento ogni 15 min circa, cioè lavorare con circa $T=1000s$ ottenendo circa $f_i = 0,001 Hz$.

In queste condizioni il contributo del rumore bianco è

$$\sqrt{n_B^2} = S_v^{1/2} \sqrt{2} \sqrt{f_S - f_i} \approx \sqrt{2} S_v^{1/2} f_S^{1/2} = 358 \mu V$$

e quello del rumore $1/f$ risulta al confronto trascurabile

$$\sqrt{n_f^2} = \sqrt{2} S_v^{1/2} f_C^{1/2} \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 17,1 \mu V$$

Quindi in totale

$$\sqrt{n_T^2} = \sqrt{n_B^2 + n_f^2} \approx 358 \mu V$$

In queste condizioni la sensibilità della misura è scarsa: la minima variazione di tensione misurabile è

$$\Delta V_{S_{\min}} = \sqrt{n_T^2} = 358 \mu V$$

che corrisponde a una variazione di resistenza minima misurabile troppo alta rispetto a quello che occorre per utilizzare il sensore

$$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}}\right)_{\min} = \frac{\Delta V_{S_{\min}}}{\frac{V_A}{4}} \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$$

A2) Misura con filtraggio passabasso

Si può ridurre il rumore utilizzando oltre al filtraggio passa-alto detto anche un filtro passa-basso, che deve passare le variazioni del segnale su tempi di 10s, cioè componenti con frequenze fino a circa 0,1 Hz. Perciò utilizziamo una frequenza di taglio passabasso circa 10 volte maggiore $f_s = 1 \text{ Hz}$.

In queste condizioni il contributo del rumore bianco

$$\sqrt{n_B^2} = \sqrt{2} S_v^{1/2} \sqrt{f_s - f_i} \approx \sqrt{2} S_v^{1/2} f_s^{1/2} \approx 113 \text{ nV}$$

risulta trascurabile rispetto a quello del rumore 1/f

$$\sqrt{n_f^2} = \sqrt{2} S_v^{1/2} f_C^{1/2} \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 9,3 \mu V$$

Quindi in totale abbiamo

$$\sqrt{n_T^2} = \sqrt{n_B^2 + n_f^2} \approx 9,3 \mu V$$

La sensibilità della misura migliora: la minima variazione di tensione misurabile è

$$\Delta V_{S_{\min}} = \sqrt{n_T^2} = 9,3 \mu V$$

che corrisponde a una variazione di resistenza minima misurabile

$$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}} \right)_{\min} = \frac{\Delta V_{S\min}}{\frac{V_A}{4}} = 3,1 \cdot 10^{-4}$$

(B) Misure con alimentazione alternata sinusoidale di ampiezza V_A e filtri risonanti

Potenza dissipata nel sensore

$$\frac{1}{2} \left(\frac{V_A}{2} \right)^2 \frac{1}{R_{S0}} < P_{d\max} = 20 \mu W \quad \text{deve essere} \quad V_A < 2\sqrt{2P_{d\max}R_{S0}} = 179 mV$$

Utilizziamo $V_A = 170 mV$.

Ampiezza del segnale di uscita del ponte prodotto da variazione ΔR_S del sensore che sbilancia il ponte

$$V_S = \frac{V_A}{4} \cdot \frac{\Delta R_S}{R_{S0}} = 42,5 mV \cdot \frac{\Delta R_S}{R_{S0}}$$

cioè una variazione $\Delta R_S / R_S = 10^{-3}$ produce una variazione di ampiezza $\Delta V_S = 42,5 \mu V$

In uscita dal ponte il segnale è una tensione sinusoidale con frequenza f_a e fase eguali alla tensione di alimentazione. Impiegando un filtro passabanda per tagliare il rumore e passare il segnale, la frequenza f_a deve essere eguale alla frequenza centrale f_r del filtro. I filtri disponibili hanno $f_r = 1 kHz$ oppure con $f_r = 100 kHz$. In entrambi i casi frequenza e fase del segnale non cambiano passando attraverso il preamp (circuito lineare a parametri costanti con banda banda $f_{pa} \gg f_a$) e attraverso il filtro passabanda ($f_a = f_r$ frequenza di risonanza). Il segnale in uscita dal filtro dunque è sinusoidale con frequenza e fase eguali alla tensione di alimentazione.

Del segnale sinusoidale occorre misurare l'ampiezza massima e ciò si può ottenere in vari modi. Ad esempio con un voltmetro campionatore sincronizzato sul massimo della sinusoide (come riferimento per sincronizzare il campionamento si utilizza la tensione di alimentazione del ponte). Oppure utilizzando un voltmetro per tensione alternata (AC voltmeter, che si autosincronizza con il segnale sinusoidale purchè questo arrivi al voltmetro ben filtrato, cioè con buon S/N).

B1) Misura con filtro passabanda con $f_r = 1 kHz$ e $Q = 10$

Il filtro applica all'uscita del preamp una stretta banda passante centrata a f_r e quindi dobbiamo utilizzare una alimentazione $f_a = f_r = 1 kHz$. La larghezza di banda del filtro è

$$\Delta f_r = \frac{f_r}{Q} = 100 \text{ Hz} \quad \text{per il segnale e} \quad \Delta f_{Rn} = \frac{\pi}{2} \frac{f_r}{Q} = 157 \text{ Hz} \quad \text{per il rumore}$$

In questo caso abbiamo $f_r = f_c$ pertanto $S_T(f_r) \approx 2S_v$ e quindi

$$\sqrt{n_T^2} \approx \sqrt{S_T(f_r) \Delta f_{Rn}} = \sqrt{2S_v \Delta f_{Rn}} \approx 1,4 \mu V$$

la minima variazione di tensione misurabile è

$$\Delta V_{S_{\min}} = \sqrt{n_T^2} \approx 1,4 \mu V$$

che corrisponde a un netto miglioramento di sensibilità: la variazione di resistenza minima misurabile è

$$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}} \right)_{\min} = \frac{\Delta V_{S_{\min}}}{\frac{V_A}{4}} = 3,3 \cdot 10^{-5}$$

B2) Misura con filtro passabanda con $f_r=100\text{kHz}$ e $Q=100$

Il filtro applica all'uscita del preamp una stretta banda passante centrata a f_r e quindi dobbiamo utilizzare una alimentazione a $f_a = f_r = 100\text{kHz}$. La larghezza di banda del filtro è

$$\Delta f_r = \frac{f_r}{Q} = 1000 \text{ Hz} \quad \text{per il segnale e} \quad \Delta f_{Rn} = \frac{\pi}{2} \frac{f_r}{Q} = 1570 \text{ Hz} \quad \text{per il rumore}$$

In questo caso abbiamo $f_r \gg f_c$ pertanto $S_T(f_r) \approx S_v$ e quindi

$$\sqrt{n_T^2} \approx \sqrt{S_T(f_r) \Delta f_{Rn}} = \sqrt{S_v \Delta f_{Rn}} \approx 3,2 \mu V$$

la minima variazione di tensione misurabile è

$$\Delta V_{S_{\min}} = \sqrt{n_T^2} \approx 3,2 \mu V$$

Il miglioramento di sensibilità, pur essendo notevole, risulta inferiore a quello ottenuto con il filtro precedente con $f_r=1\text{kHz}$ e $Q=10$: la variazione di resistenza minima misurabile è

$$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}} \right)_{\min} = \frac{\Delta V_{S_{\min}}}{\frac{V_A}{4}} = 7,5 \cdot 10^{-5}$$

(C) Misure con alimentazione alternata sinusoidale di ampiezza V_A e filtraggio con LIA

Come discusso in (B), la tensione di alimentazione alternata sinusoidale è un segnale di riferimento che indica chiaramente frequenza e fase del segnale da misurare. Si può utilizzarlo per l'ingresso di riferimento di un Lock-in Amplifier (LIA) che riceve all'ingresso di segnale l'uscita del preamp. Indichiamo con f_F la frequenza di taglio del filtro passabasso interno del LIA. Il segnale in uscita dal preamp è la sinusoide di alimentazione modulata in ampiezza dalle variazioni del sensore

$$\Delta R_S(t)/R_{S0}$$

$$V_S(t) = \frac{V_A(t)}{4} \cdot \frac{\Delta R_S(t)}{R_{S0}}$$

La demodulazione effettuata dal LIA riporta il segnale in banda base, cioè il segnale in uscita dal LIA è quasi una continua, la sua forma d'onda è quella della variazione di resistenza $\Delta R_S(t)/R_{S0}$ filtrata passabasso con banda f_F dal filtro interno del LIA. Le variazioni di resistenza del sensore hanno componenti fino a circa 0,1Hz e quindi per poterle rilevare utilizziamo una frequenza di taglio del passabasso circa 10 volte maggiore $f_F = 1 \text{ Hz}$.

Il segnale sinusoidale ha frequenza e fase eguali al riferimento e quindi tutta la sua potenza viene convertita in potenza continua all'uscita del LIA

$$P_S = \frac{V_S^2}{2}$$

Contribuiscono alla potenza di rumore in uscita dal LIA solo le componenti di rumore entro una banda $2f_F$ centrata sulla frequenza f_a dell'alimentazione (selezione in frequenza del LIA) e la loro potenza totale viene divisa per 2 (selezione in fase del LIA). Quindi la potenza di rumore in uscita dal LIA è

$$P_n = \frac{S_T(f_a) 2f_F}{2} = S_T(f_a) f_F$$

Scegliendo una frequenza $f_a \gg f_c$, ad esempio utilizzando ancora $f_a = 100 \text{ kHz}$, il contributo del rumore $1/f$ risulta trascurabile, quindi $S_T(f_a) \approx S_v$ e pertanto

$$P_n = S_v f_F$$

Perciò abbiamo

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{P_S}{P_n} = \frac{V_S^2}{2 S_v f_F}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{V_S}{\sqrt{2 S_v f_F}} = \frac{V_S}{S_v^{1/2} \sqrt{2 f_F}}$$

La minima variazione di tensione misurabile è

$$\Delta V_{S_{\min}} = S_v^{1/2} \sqrt{2 f_F} = 113 nV$$

Che corrisponde a variazione di resistenza minima misurabile

$$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}} \right)_{\min} = \frac{\Delta V_{S_{\min}}}{\frac{V_A}{4}} = 2,7 \cdot 10^{-6}$$

(D) Riassunto, confronto e commento delle soluzioni viste

Abbiamo analizzato vari approcci per la misura richiesta delle variazioni di resistenza del sensore.

Misure con alimentazione continua

Utilizzando una alimentazione continua abbiamo un segnale quasi continuo (con spettro in frequenza stretto e centrato su $f=0$) e la presenza del rumore $1/f$ rende necessario usare un apposito filtraggio passa-alto (CDS correlated double sampling) che lascia passare il segnale e limita il contributo di rumore $1/f$. Se oltre al CDS non usiamo alcun filtraggio passa-basso, risulta molto elevato il contributo del rumore bianco su tutta la larga banda del preamplificatore e la sensibilità ottenuta è nettamente insufficiente. Il contributo del rumore bianco si può ridurre drasticamente utilizzando oltre al CDS un filtraggio passabasso con frequenza di taglio abbassata quanto permesso dalla condizione di passare tutte le componenti significative del segnale, cioè nel nostro caso taglio a circa 1Hz. In queste condizioni il contributo del rumore $1/f$ rimane elevato perchè dovendo misurare un segnale continuo (sito nella zona spettrale a bassa frequenza dove il rumore $1/f$ è dominante) il filtraggio passa-alto che si può impiegare (CDS) ha efficacia moderata. Abbiamo valutato che con CDS e filtraggio passabasso con taglio a 1Hz la sensibilità risulta limitata a circa $\Delta R_S / R_{S0} \approx 3 \cdot 10^{-4}$.

Misure con alimentazione in alternata e filtri passabanda a parametri costanti

Utilizzando una alimentazione in alternata si porta il segnale a frequenza f_a abbastanza elevata, dove il rumore $1/f$ è trascurabile o almeno paragonabile rispetto al rumore bianco. Il segnale ora ha spettro stretto (larghezza $\approx 0,1$ Hz) e centrato a f_a , perciò si può impiegare un filtro passabanda stretto per ridurre drasticamente il rumore senza tagliare il segnale.

Tra i due filtri passabanda proposti, a prima vista si potrebbe pensare sia consigliabile il secondo (quello con $f_r = 100$ kHz e $Q=100$) perchè

1) la frequenza centrale è più elevata $f_r \gg f_c$, quindi la densità di rumore $1/f$ in banda è trascurabile

2) il fattore di qualità è migliore $Q=100$ contro $Q=10$.

Si verifica invece che è migliore il primo filtro (quello con $f_r = 1\text{kHz}$ e $Q=10$). Ciò risulta intuitivo se si tiene presente che il rumore filtrato è determinato dalla banda passante del filtro

$$\Delta f_R = \frac{f_r}{Q}$$

che dipende non solo dalla qualità relativa del filtro Q , ma anche dal valore della frequenza centrale f_r . Nel nostro caso il passabanda a $f_r = 1\text{kHz}$ ha banda passante 10 volte minore. Il vantaggio del filtro a 1kHz è solo in parte ridotto dal fatto che la densità spettrale a 1kHz è più alta di quella a 100kHz, perchè è maggiore solo di un fattore 2. In conclusione, il rumore quadratico medio in uscita dal filtro a 1kHz è più piccolo di un fattore 5. Si ottiene una sensibilità $\Delta R_s / R_{s0} \approx 3,3 \cdot 10^{-5}$

Va ricordato e sottolineato che utilizzando alimentazione alternata e filtri passabanda a parametri costanti il segnale da misurare in uscita dal filtro è sinusoidale e va misurata la sua ampiezza massima utilizzando strumenti adatti allo scopo (vedere al punto (B))

Misure con alimentazione in alternata e filtraggio con LIA

I risultati ottenuti mostrano che utilizzando un LIA si può ottenere sensibilità molto migliore rispetto ai filtri passabanda a parametri costanti.

In termini intuitivi si nota che questo vantaggio deriva dal fatto che utilizzando un LIA la larghezza di banda di filtraggio del rumore e il centro della banda si possono scegliere l'uno indipendentemente dall'altro. Il centro banda è fissato dalla frequenza dell'alimentazione del ponte. La larghezza di banda è fissata dalla frequenza di taglio del filtro passabasso interno del LIA. Risulta così possibile avere una larghezza di banda di filtraggio del LIA molto piccola in valore assoluto e centrata a qualsiasi frequenza. Si ottiene una sensibilità $\Delta R_s / R_{s0} \approx 4 \cdot 10^{-6}$

Va ricordato e sottolineato che utilizzando alimentazione alternata e filtraggio con un LIA il segnale da misurare in uscita dal LIA è una tensione continua che può essere misurata direttamente con un voltmetro per continua (DC voltmeter).