

PROBLEMA 2

QUADRO DEI DATI

Segnale ottico:

rettangolare a durata T_P specificata di volta in volta

Potenza P_S ; lunghezza d'onda $\lambda_i = 600$ nm.

Fondo ottico:

Potenza P_F specificata di volta in volta

PMT Fotomoltiplicatore:

fotocatodo S11 con efficienza quantica $\eta_{DM} = 0,025$ a $\lambda_i = 600$ nm

corrente di buio al catodo $I_{bk} = 0,16$ fA (corrispondente a $n_{bk} = 10^3$ elettroni/secondo)

moltiplicatore con guadagno $G = 10^5$ e fattore di eccesso di rumore $F = 2$

PIN Fotodiode in Silicio:

Efficienza quantica $\eta_{DM} = 0,30$ a $\lambda_i = 600$ nm

corrente di buio $I_b = 0,05$ pA

Preamplicatore di corrente a transimpedenza:

banda passante limitata da polo semplice a $f_{pa} = 100$ MHz

densita' efficace unilatera di rumore di corrente riferita all'ingresso: $S_{ip}^{1/2} = 0,05$ pA/Hz^{1/2}

N.B: non si tiene conto del rumore di tensione con densita' efficace unilatera, l'enunciato del problema avverte che il suo effetto risulta trascurabile in questa configurazione circuitale.

Per riportare i risultati in termini di potenza ottica incidente occorre la responsività del rivelatore

$$S_D = \eta \cdot \frac{\lambda q}{hc} = \eta \cdot \frac{\lambda [\mu\text{m}]}{1,24} \text{ A/W}$$

che pertanto preliminarmente calcoliamo per i due rivelatori

PMT a $\lambda_i = 600$ nm: $\eta_{DM} = 0,025$ pertanto $S_{DM} = 0,012$ A/W = 12mA/W

PIN a $\lambda_i = 600$ nm: $\eta_{DP} = 0,30$ pertanto $S_{DP} = 0,145$ A/W = 145mA/W

A) Misura di impulsi con durata $T_P = 1\mu\text{s}$, senza fondo ottico $P_F = 0$

A1) con fotomoltiplicatore PMT

densita' spettrale di rumore di corrente:

del preamp $S_{ip} = 25 \cdot 10^{-28} \text{ A}^2 / \text{Hz}$

di buio all'anodo PMT $S_{ibA} = 2qI_{bk} \cdot F \cdot G^2 = 51,2 \cdot 10^{-36} \cdot 2 \cdot 10^{10} = 1,024 \cdot 10^{-24} A^2 / Hz$

dato che $S_{ip} \ll S_{ibA}$ il rumore di corrente di buio è dominante, in totale all'anodo si ha

$$S_{iTA} = S_{ip} + S_{ibA} \approx S_{ibA} = 1,024 \cdot 10^{-24} A^2 / Hz$$

e la densità totale riferita al catodo è $S_{iTK} = \frac{S_{iTA}}{G^2} = \frac{S_{ibA}}{G^2} = 2qI_{bk} \cdot F = 1,024 \cdot 10^{-34} A^2 / Hz$

Il rumore è bianco su banda molto maggiore di quella del segnale, che ha forma d'onda rettangolare.

Pertanto utilizziamo un filtraggio mediante un Gated Integrator con durata eguale al segnale

$T_G = T_P = 1 \mu s$, che è di pratico uso ed è una buona approssimazione del filtraggio ottimo. Esso ha una banda (unilatera) di filtraggio passabasso del rumore

$$f_G = \frac{1}{2T_G} = \frac{1}{2T_P} = 500 kHz$$

per cui il rumore riferito al catodo è

$$\sqrt{i_{nK}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_G} = \sqrt{\frac{2qI_{bk} \cdot F}{2T_P}} = 0,72 \cdot 10^{-14} A = 7,2 fA$$

e ad esso corrisponde una corrente al catodo minima rivelabile

$$I_{PK \min} = \sqrt{i_{nK}^2} = 7,2 fA$$

Notiamo però che il filtraggio ha banda abbastanza larga (tempo di integrazione breve) e il rumore di corrente di buio del PMT è piuttosto basso, pertanto è possibile che siano le fluttuazioni della fotocorrente I_{pk} a determinare la minima corrente misurabile, in quanto pongano un limite più alto di quello ora calcolato tenendo conto solo delle fluttuazioni della corrente di buio I_{bk} . Controlliamo se ciò si verifichi nel nostro caso. Considerando le sole fluttuazioni della fotocorrente

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{I_{pk}^2}{F 2qI_{pk} f_G}$$

il limite minimo misurabile $I_{pk, \min}$ corrispondente a $(S/N)=1$ risulta

$$I_{pk, \min} = F 2q f_G = F \cdot \frac{q}{T_G} = 3,2 \cdot 10^{-13} A = 320 fA$$

Verifichiamo quindi che questo limite $I_{pk, \min}$ posto dalle fluttuazioni della fotocorrente risulta nettamente superiore al limite $I_{PK, \min}$ posto dalle fluttuazioni date dalla corrente di buio e dal preamp e pertanto è dominante. Ad esso corrisponde una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{S \min} = \frac{I_{pk, \min}^2}{S_{DM}} = \frac{320 \cdot 10^{-15}}{12 \cdot 10^{-3}} = 26,6 pW$$

A2) con fotodiode PIN

densità spettrale di rumore di corrente:

del preamp $S_{ip} = 25 \cdot 10^{-28} A^2 / Hz$

di buio del fotodiode $S_{iB} = 2qI_B = 1,6 \cdot 10^{-32} A^2 / Hz$

dato che $S_{iB} \ll S_{ip}$, con il PIN è dominante il rumore del preamp e in totale si ha

$$S_{iT} = S_{ip} + S_{iB} \approx S_{ip} = 25 \cdot 10^{-28} A^2 / Hz$$

Filtrando con GI con $T_G = 1 \mu s$, banda di rumore (unilatera) $f_G = 1/2 T_G = 500 kHz$, il rumore è

$$\sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{ip}}{2T_G}} = 3,53 \cdot 10^{-11} A$$

e la corrente minima misurabile risulta

$$I_{Dmin} = \sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{iT}}{2T_G}} = 3,53 \cdot 10^{-11} A = 35,3 pA$$

Verifichiamo anche qui le fluttuazioni della fotocorrente I_{pk} . Nel caso del PIN il calcolo è eguale a quello fatto per il PMT, ma senza il fattore di eccesso di rumore (che nel PMT è dovuto alla statistica del guadagno G)

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{I_D^2}{2qI_D f_G}$$

il limite minimo misurabile $I_{D,min}$ corrispondente a $(S/N)=1$ risulta

$$I_{Dmin} = 2qf_G = \frac{q}{T_G} = 16 \cdot 10^{-14} A = 160 fA$$

Abbiamo così verificato che il limite I_{Dmin} posto dalle fluttuazioni della fotocorrente nel PIN è molto inferiore al limite I_{Dmin} posto dalle fluttuazioni date dalla corrente di buio. La minima corrente misurabile è dunque determinata dalla corrente di buio e ad essa corrisponde una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{Smin} = \frac{I_{Dmin}}{S_{DP}} = \frac{35,3 \cdot 10^{-12}}{145 \cdot 10^{-3}} = 243 pW$$

La sensibilità del PIN è limitata dal rumore dell'elettronica e pertanto risulta molto inferiore a quella del PMT. Per il PMT il rumore dell'elettronica risulta irrilevante grazie all'elevato guadagno di corrente G del moltiplicatore di elettroni interno e l'aumento delle fluttuazioni prodotto dalla natura statistica del guadagno ha un effetto moderato, indicato dal modesto valore $F=2$ del fattore di peggioramento.

B) Misura di impulsi con durata T_P più lunga, senza fondo ottico $P_F=0$

B1) impulsi con durata 10 volte maggiore $T_P = 10 \mu s$

Gated Integrator con durata eguale al segnale $T_G=T_P=10\mu s$ e banda (unilatera) di filtraggio passabasso del rumore

$$f_G = \frac{1}{2T_G} = \frac{1}{2T_P} = 50kHz$$

Con fotomoltiplicatore PMT

L'aumento di T_P del fattore 10 fa diminuire del fattore $\sqrt{10}$ il rumore riferito al catodo

$$\sqrt{i_{nK}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_G} = \sqrt{\frac{2qI_{bk} \cdot F}{2T_P}} = 0,227 \cdot 10^{-14} A = 2,27 fA$$

e quindi diminuisce del fattore $\sqrt{10}$ anche il limite da esso posto alla corrente al catodo minima rivelabile

$$I_{PK \min} = \sqrt{i_{nK}^2} = 2,27 fA$$

Il limite minimo posto dalle fluttuazioni della fotocorrente diminuisce del fattore 10

$$I_{pk, \min} = F 2q f_G = F \cdot \frac{q}{T_G} = 1,6 \cdot 10^{-13} A = 32 fA$$

e rimane nettamente maggiore e quindi dominante. Ad esso corrisponde ora una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{S \min} = \frac{I_{pk \min}}{S_{DM}} = \frac{16 \cdot 10^{-15}}{12 \cdot 10^{-3}} = 2,6 pW$$

Con fotodiodo PIN

L'aumento di T_P del fattore 10 fa diminuire del fattore $\sqrt{10}$ il rumore

$$\sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{ip}}{2T_P}} = 1,12 \cdot 10^{-11} A$$

e quindi diminuisce dello stesso fattore $\sqrt{10}$ il limite posto alla corrente minima rivelabile

$$I_{D \min} = \sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{iT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{iT}}{2T_G}} = 1,12 \cdot 10^{-11} A = 11,2 pA$$

Il limite posto dalle fluttuazioni della fotocorrente alla corrente minima misurabile $I_{D,\min}$ invece diminuisce di un fattore 10

$$I_{D,\min} = 2qf_G = \frac{q}{2T_G} = 8 \cdot 10^{-15} A = 8 fA$$

quindi il limite posto dal rumore risulta ancora più nettamente dominante. Ad esso corrisponde ora una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{S,\min} = \frac{I_{D,\min}}{S_{DP}} = \frac{11,2 \cdot 10^{-12}}{145 \cdot 10^{-3}} = 77 pW$$

B2) impulsi con durata 10000 volte maggiore $T_p = 10$ ms

Gated Integrator con durata eguale al segnale $T_G = T_p = 10$ ms e banda (unilatera) di filtraggio passabasso del rumore

$$f_G = \frac{1}{2T_G} = \frac{1}{2T_p} = 50 Hz$$

Con fotomoltiplicatore PMT

L'aumento di T_p del fattore 10000 fa diminuire del fattore $\sqrt{10000} = 100$ il rumore riferito al catodo

$$\sqrt{i_{nK}^2} = \sqrt{S_{iTK} f_G} = \sqrt{\frac{2qI_{bk} \cdot F}{2T_p}} = 0,072 \cdot 10^{-15} A = 72 aA$$

e quindi diminuisce del fattore 100 anche il limite da esso posto alla corrente al catodo minima rivelabile

$$I_{PK,\min} = \sqrt{i_{nK}^2} = 72 aA$$

Il limite minimo posto dalle fluttuazioni della fotocorrente diminuisce del fattore 10000

$$I_{PK,\min} = F2qf_G = F \cdot \frac{q}{2T_G} = 1,6 \cdot 10^{-17} A = 16 aA$$

Abbiamo così verificato che il limite $I_{pk,\min}$ posto dalle fluttuazioni della fotocorrente risulta ora nettamente inferiore al limite posto dalle fluttuazioni della corrente di buio, ma il divario non è grandissimo, tra i due vi è un fattore 4,5. Pertanto anche le fluttuazioni della fotocorrente contribuiranno ad innalzare lievemente il limite effettivo rispetto a quello $I_{PK,\min}$ calcolato con la corrente di buio soltanto. Si può fare una valutazione più precisa scrivendo il $(S/N)^2$ con entrambi i contributi di fluttuazione e calcolando il valore di I_{PK} per cui $(S/N)^2 = 1$, ma il risultato sarà solo di

poco maggiore di $I_{PKmin} = 72 \text{ aA}$ e questa maggior precisione non è qui richiesta. A questo limite corrisponde ora una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{Smin} = \frac{I_{PKmin}}{S_{DM}} = \frac{72 \cdot 10^{-18}}{12 \cdot 10^{-3}} = 6 \text{ fW}$$

Al crescere di T_P a partire da $T_P = 1 \mu\text{s}$ il limite diminuisce come $1/T_P$ fino a che dominano le fluttuazioni della fotocorrente e poi quando diventano dominanti quelle della corrente di buio diminuisce come $\sqrt{T_P}$. Infatti vediamo che il fattore di miglioramento con $T_P = 10000$ volte maggiore risulta essere 2216 che è appunto intermedio tra 10000 e $\sqrt{10000} = 100$.

Con fotodiode PIN

L'aumento di T_P del fattore 10000 fa diminuire del fattore $\sqrt{10000} = 100$ il rumore

$$\sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{IT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{ip}}{2T_P}} = 3,53 \cdot 10^{-13} \text{ A} = 354 \text{ fA}$$

e quindi diminuisce dello stesso fattore 100 il limite che pone alla corrente al catodo minima rivelabile

$$I_{Dmin} = \sqrt{i_{nD}^2} = \sqrt{S_{IT} f_G} = \sqrt{\frac{S_{IT}}{2T_G}} = 3,53 \cdot 10^{-13} \text{ A} = 354 \text{ fA}$$

A questo limite corrisponde ora una minima potenza ottica rivelabile

$$P_{Smin} = \frac{I_{Dmin}}{S_{DP}} = \frac{353 \cdot 10^{-15}}{145 \cdot 10^{-3}} = 2,43 \text{ pW}$$

Non vale la pena di calcolare il limite posto dalle fluttuazioni della fotocorrente alla corrente minima misurabile I_{Dmin} , che diminuisce di un fattore 10000 ed è ancor più nettamente inferiore e irrilevante.

C) Misura di impulsi con $T_P = 10 \text{ ms}$ in presenza di fondo ottico P_F non trascurabile

Al rivelatore arriva una luce continua di fondo che non viene eliminata da filtri ottici perchè ha la stessa lunghezza d'onda del segnale. Essa produce una ulteriore corrente I_F che si aggiunge alla corrente di buio I_b portando un ulteriore contributo di rumore di corrente shot costante. Vogliamo determinare la potenza di luce fondo che produce un raddoppio del valore quadratico del rumore nella misura.

Con fotomoltiplicatore PMT

Abbiamo visto che senza fondo ottico la densità di rumore di corrente di buio al catodo del PMT è

$$S_{ibK} = 2qI_{bk} \quad \text{e produce all'anodo un rumore di corrente } S_{ibA} = 2qI_{bk} \cdot F \cdot G^2 \quad \text{che risulta}$$

dominante rispetto a quello del preamp $S_{ibA} \gg S_{ip}$; il rumore totale all'anodo collegato

all'ingresso del preamp è quindi $S_{iTA} = S_{ibA} + S_{ip} \approx S_{ibA} = 2qI_{bk} \cdot F \cdot G^2$ e la corrispondente

densità riportata al catodo è

$$S_{iTK} = \frac{S_{iTA}}{G^2} = \frac{S_{ibA}}{G^2} = 2qI_{bk} \cdot F = 1,024 \cdot 10^{-34} \text{ A}^2 / \text{Hz}$$

La corrente continua I_{Fk} generata al catodo dal fondo ottico semplicemente si aggiunge alla corrente di buio e si ha in totale una maggiore corrente shot

$$I_{bk} + I_{Fk}$$

a cui corrisponde una maggiore densità spettrale $2q(I_{bk} + I_{Fk})$ che rende ancor più trascurabile il rumore del preamplificatore. La totale densità di rumore riportata al catodo è ora

$$S_{iTK} = \frac{S_{iTA}}{G^2} = 2q(I_{bk} + I_{Fk}) \cdot F$$

e con il filtraggio del GI il rumore riferito al catodo è

$$\overline{i_{nK}^2} = S_{iTK} f_G = \frac{2q(I_{bk} + I_{Fk})F}{2T_p}$$

e quindi esso raddoppia quando la corrente di fondo eguaglia la corrente di buio

$$I_{Fkm} = I_{bK} = 0,16 \text{ fA}$$

a questo valore di corrente di fondo corrisponde a una potenza ottica di fondo

$$P_{Fm} = \frac{I_{Fkm}}{S_{DM}} = \frac{0,16 \cdot 10^{-15}}{12 \cdot 10^{-3}} = 13,3 \text{ fW}$$

In queste condizioni il valor quadratico del rumore aumenta di un fattore 2 e quindi la minima potenza ottica misurabile di un fattore $\sqrt{2}$

$$P_{Smin} = \sqrt{2} \cdot 6 \text{ fW} = 8,5 \text{ fW}$$

Con fotodiodo PIN

Anche con il PIN la corrente continua I_{Fp} generata nel rivelatore dal fondo ottico semplicemente si aggiunge alla corrente di buio I_b e si ha in totale una maggiore corrente shot

$$I_b + I_{Fp}$$

a cui corrisponde una maggiore densità spettrale $2q(I_b + I_{Fp})$. Nel caso del PIN però il rumore di

corrente di buio è trascurabile rispetto al rumore di corrente del preamplificatore S_{ip} . Per aumentare il rumore totale di corrente di un fattore 2 occorre quindi che il rumore shot della corrente di fondo cresca fino a eguagliare il rumore del preamplificatore

$$2qI_{Fpm} = S_{ip} = 25 \cdot 10^{-28} \text{ A}^2 / \text{Hz}$$

quindi occorre che la corrente di fondo arrivi a

$$I_{Fpm} = \frac{S_{ip}}{2q} = 7,8 \text{ nA}$$

questa corrente è generata da una potenza ottica di fondo

$$P_{Fm} = \frac{I_{Fpm}}{S_{DP}} = \frac{7,8 \cdot 10^{-9}}{0,145} = 53,8 \text{ nW}$$

In queste condizioni il valor quadratico del rumore aumenta di un fattore 2 e quindi la minima potenza ottica misurabile aumenta di un fattore $\sqrt{2}$

$$P_{Smin} = \sqrt{2} \cdot 2,43 \text{ pW} = 3,4 \text{ pW}$$