PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Segnale a impulso rettangolare

Ampiezza: V_P variabile, da misurare

Durata: $T_P = 0{,}5\ \mu s$

Intervallo tra impulsi T_R : indicato caso per caso

È disponibile un segnale ausiliario che indica il tempo di arrivo di ciascun impulso.

Rumore

Bianco con densità (unilatera) efficace $\sqrt{S_B} = 40\, nV/\sqrt{Hz}$

in (A) e (B) limitata alle alte frequenze da un taglio a polo semplice a frequenza $f_n = 100MHz$

in (C) limitata alle alte frequenze da un taglio a polo semplice a frequenza $f_n = 16kHz$

in (D) limitata alle alte frequenze da un taglio a polo semplice a frequenza $f_n = 320kHz$

(A) Misure effettuate su singoli impulsi in presenza di rumore bianco a larga banda

A1) Senza alcun filtraggio

La banda del rumore è $\frac{\pi}{2} f_n \approx 157MHz$, il tempo caratteristico di autocorrelazione è

$$T_n = \frac{1}{2\pi f_n} \approx 1{,}6ns$$

e la funzione di autocorrelazione è

$$R_{nn}(\tau) = \overline{n_B^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_n} \right)$$

Senza filtraggio il rumore è acquisito su tutta la sua banda

$$\sqrt{\overline{n_B^2}} = S_B^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2} f_n} = S_B^{1/2} \sqrt{\frac{1}{4T_n}} \approx 500\mu V$$

Si ottiene un S/N

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{NF} = \frac{V_P}{\sqrt{\overline{n_B^2}}}$$

l'ampiezza minima misurabile direttamente senza filtraggio è

$$\left(V_{P\min} \right)_{NF} = \sqrt{\overline{n_B^2}} \approx 500\mu V$$

A2) Con filtraggio mediante Gated Integrator GI

L'autocorrelazione della funzione peso del GI con durata $T_G = T_P = 0,5\mu s$ è molto più larga di quella del rumore

$$k_{ww}(\tau) = \frac{1}{T_G}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_G}\right) \qquad \text{per } |\tau| \le T_G \qquad \text{e nulla altrove}$$

dunque il rumore può essere considerato bianco e il GI con tempo di integrazione T_G eguale alla durata T_P del segnale realizza in pratica il filtraggio ottimo. Consideriamo GI con funzione peso normalizzata a guadagno unitario in continua, con cui calcoliamo direttamente il rumore da confrontare con il segnale V_P (NB il guadagno del filtro non influisce sul S/N). Abbiamo così

$$\sqrt{\overline{n_G^2}} = S_B^{1/2}\sqrt{\frac{1}{2T_G}} \approx 40\mu V$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{GI} = \frac{V_P}{\sqrt{S_v \dfrac{1}{2T_G}}} = \frac{V_P}{\sqrt{\overline{n_G^2}}}$$

l'ampiezza minima misurabile con filtraggio mediante GI è

$$\left(V_{P\min}\right)_{GI} = \sqrt{\overline{n_G^2}} \approx 40\mu V$$

Il fattore di miglioramento del S/N dato dal filtraggio è determinato dal rapporto delle larghezze di banda su cui viene acquisito il rumore

$$F_G = \sqrt{\frac{\overline{n_B^2}}{\overline{n_G^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} f_n \Big/ \frac{1}{2T_G}} = \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} \approx 12,5$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{GI} = F_G\left(\frac{S}{N}\right)_{NF} \approx 12,5\left(\frac{S}{N}\right)_{NF}$$

$$\left(V_{P\min}\right)_{GI} = \frac{1}{F_G}\left(V_{P\min}\right)_{NF} = \frac{1}{12,5}\sqrt{\overline{n_B^2}}$$

(B) <u>Misure effettuate utilizzando più impulsi in presenza di rumore bianco a larga banda</u>

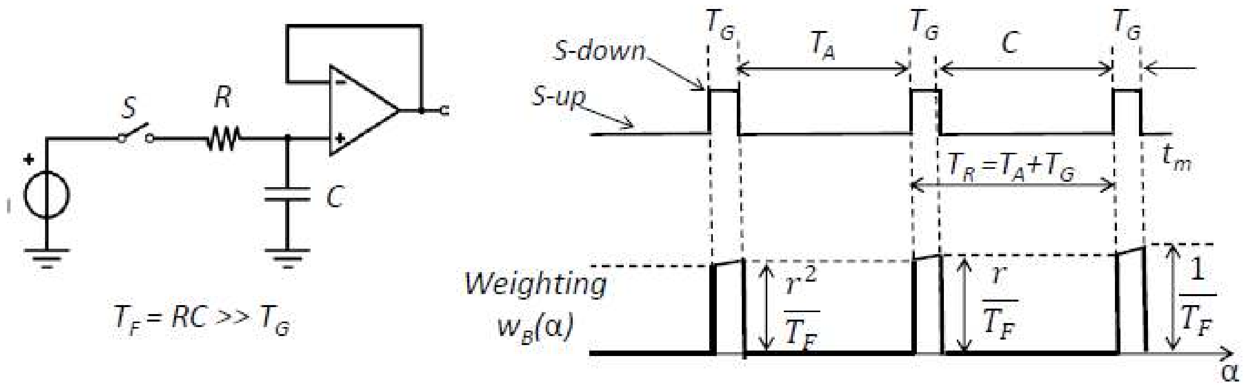
Aumentando la frequenza di ripetizione con cui il sistema di controllo rileva sul sistema la variabile, la trasduce nell'ampiezza di un impulso e la trasmette all'apparato di misura, si ha una ridondanza dell'informazione sfruttabile per migliorare la misura. Si può utilizzare un boxcar integrator BI per misurare l'ampiezza mediata sugli impulsi contenuti in un intervallo di tempo nel quale si possa considerare praticamente costante l'ampiezza stessa. Nel nostro caso questo intervallo è al massimo $T_m \approx 1s$, che con frequenza di ripetizione $f_R = 2kHz$ contiene un numero di impulsi

$$N \approx f_R T_m \approx 2000$$

Come riassunto e schematizzato nella figura, il BI compie due operazioni di filtraggio:

1) acquisisce ogni impulso integrandolo come un GI e

2) effettua una media delle varie acquisizioni pesate esponenzialmente.



Allo N-esimo impulso precedente l'istante di misura all'uscita il BI dà un peso $r^N = \exp\left(-N\frac{T_G}{T_F}\right)$.

Per N ≥ 2000 il peso r^N deve essere trascurabile, scegliamo perciò T_F in modo che sia $r^N < 0,01$.

Per avere $\exp\left(-N\frac{T_G}{T_F}\right) < 0,01$ occorre che sia $N\frac{T_G}{T_F} > 5$, cioè $T_F \le \frac{NT_G}{5} = 200\mu s$.

Scegliamo $T_F = 200\mu s$ e abbiamo così $r = \exp\left(-\frac{T_G}{T_F}\right) \approx 1 - \frac{T_G}{T_F} = 1 - 2,5\cdot 10^{-3}$ e quindi

$$1 - r \approx \frac{T_G}{T_F} = 2,5\cdot 10^{-3} = \frac{1}{400}$$

La media pesata aumenta il segnale del fattore

$$1 + r + r^2 + r^3 + ...r^n + ... \approx \frac{1}{1-r}.$$

I valori quadratici medi del rumore delle varie acquisizioni vengono pesati con il quadrato dei pesi dati al segnale. Dato che il rumore non è correlato tra una acquisizione e l'altra, il rumore nella media è dato dalla somma dei valori quadratici pesati e quindi aumenta del fattore

$$1 + r^2 + r^4 + r^6 + ... + r^{2n} + ... \approx \frac{1}{1-r^2}.$$

In totale l'operazione di media del BI migliora il S/N ottenuto dal GI di un ulteriore fattore

$$F_B = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}} \approx 28,3$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BI} = F_B\left(\frac{S}{N}\right)_{GI} \approx 28,3\left(\frac{S}{N}\right)_{GI}$$

e l'ampiezza minima misurabile diminuisce dello stesso fattore

$$\left(V_{P\min}\right)_{BI} = \frac{1}{F_B}\left(V_{P\min}\right)_{GI} = \frac{1}{F_B F_G}\left(V_{P\min}\right)_{NF} \approx \frac{1}{500}\sqrt{\overline{n_B^2}} \approx 1\mu V$$

(C) <u>Misure effettuate utilizzando più impulsi in presenza di rumore bianco a banda limitata stretta f_n=16kHz</u>

Gli impulsi sono gli stessi visti in (B) (rettangolari con durata T_P = 0,5 μs e frequenza di ripetizione $f_R = 2kHz$) accompagnati da rumore bianco con densità (unilatera) efficace $\sqrt{S_B} = 40\,nV/\sqrt{Hz}$ limitata a una banda molto più stretta, definita da un polo a frequenza $f_{n1} \approx 16kHz$

La banda del rumore è ora $\frac{\pi}{2} f_{n1} \approx 25kHz$ e su questa banda il rumore non filtrato è

$$\sqrt{\overline{n_{B1}^2}} = S_B^{1/2}\sqrt{\frac{\pi}{2} f_{n1}} \approx 6,3\mu V$$

Utilizziamo ancora il BI ed esaminiamo per questo caso l'effetto delle due operazioni di filtraggio date dal BI.

1) Integrazione su tempo T_G=T_P (come un GI).

Il tempo caratteristico di autocorrelazione del rumore $T_{n1} = \frac{1}{2\pi f_{n1}} \approx 10\mu s$ ora risulta molto maggiore della durata del gate $T_{n1} = 10\mu s \gg T_G = 0,5\mu s$ (ovvero, ragionando in frequenza, la banda del rumore $\frac{\pi}{2} f_{n1} \approx 25kHz$ è molto più stretta di quella del filtraggio $\frac{1}{2T_G} = 1MHz$). Perciò in questo caso l'integrazione come GI non produce praticamente alcun miglioramento del S/N, si ha $F_G = 1$

$$\sqrt{\overline{n_{G1}^2}} = \sqrt{\overline{n_{B1}^2}} \approx 6,3\mu V$$

2) media delle varie acquisizioni pesate esponenzialmente.

A frequenza di ripetizione $f_R = 2kHz$ l'intervallo tra due impulsi è $T_R = 500\mu s$, quindi molto maggiore del tempo di autocorrelazione del rumore $T_{n1} = 10\mu s$

$T_{n1} \ll T_R$

perciò non c'è correlazione del rumore tra le diverse acquisizioni, rimane valida l'analisi fatta in (B) e si ottiene ancora un miglioramento del fattore

$$F_B \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} \approx 28,3$$

In conclusione, in questo caso l'ampiezza minima misurabile con filtraggio mediante BI è

$$\left(V_{P\min}\right)_{BI1} = \frac{1}{F_B}\left(V_{P\min}\right)_{GI} = \frac{1}{F_B}\left(V_{P\min}\right)_{NF} \approx \frac{1}{F_B}\sqrt{\overline{n_{B1}^2}} \approx 0,23\mu V$$

(D) Misure effettuate utilizzando più impulsi in presenza di rumore bianco a banda limitata ampia f_n=320kHz

Gli impulsi sono ancora gli stessi visti in (B) (rettangolari con durata T_P = 0,5 μs e frequenza di ripetizione $f_R = 2kHz$) accompagnati da rumore bianco con densità (unilatera) efficace

$\sqrt{S_B} = 40\, nV/\sqrt{Hz}$ limitata a una banda definita da un polo a frequenza $f_{n2} \approx 320kHz$

La banda del rumore è ora $\frac{\pi}{2} f_{n2} \approx 502kHz$ e su questa banda il rumore non filtrato è

$$\sqrt{\overline{n_{B2}^2}} = S_B^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2} f_{n2}} \approx 28,3\mu V$$

Esaminiamo anche per questo caso l'effetto delle due operazioni di filtraggio date dal BI.

1) Integrazione su tempo T_G=T_P (come un GI).

Il tempo caratteristico di autocorrelazione del rumore $T_{n2} = \frac{1}{2\pi f_{n2}} \approx 0,5\mu s$ ora risulta paragonabile alla durata del gate $T_G = 0,5\mu s$ (ovvero, ragionando in frequenza, la banda del rumore $\frac{\pi}{2} f_{n2} \approx 502kHz$ è paragonabile a quella del filtraggio $\frac{1}{2T_G} = 1MHz$). In questo caso l'integrazione come GI produce un miglioramento del S/N, che però è diverso da quello ottenuto nel caso di rumore a larga banda e va specificamente calcolato. Utilizzando la funzione di autocorrelazione del rumore

$$R_{nn}(\tau) = \overline{n_{B2}^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{n2}} \right)$$

e la autocorrelazione della funzione peso di GI (normalizzata a guadagno unitario in continua)

$$k_{ww}(\tau) = \frac{1}{T_G} \left(1 - \frac{|\tau|}{T_G} \right)$$

possiamo ricavare il rumore filtrato dal GI

$$\overline{n_{G2}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau) k_{ww}(\tau) d\tau = 2\frac{\overline{n_{B2}^2}}{T_G} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{n2}} \right) \left(1 - \frac{\tau}{T_G} \right) d\tau$$

integrando per parti

$$\overline{n_{G2}^2} = 2\overline{n_{B2}^2} \frac{T_{n2}}{T_G} \left\{ 1 - \frac{T_{n2}}{T_G} \left[1 - \exp\left(-\frac{T_G}{T_{n2}} \right) \right] \right\}$$

nel nostro caso $T_{n2} = T_G = 0,5\mu s$ e quindi

$$\overline{n_{G2}^2} = \overline{n_{B2}^2} \frac{2}{e} \approx \frac{\overline{n_{B2}^2}}{1,36} = 20,8\mu V$$

Dunque in questo caso l'operazione come GI porta un moderato miglioramento di un fattore

$$F_{G2} = \sqrt{\frac{\overline{n_{B2}^2}}{\overline{n_{G2}^2}}} \approx 1,36$$

2) media delle varie acquisizioni pesate esponenzialmente.

Anche in questo caso non c'è correlazione del rumore tra le diverse acquisizioni effettuate con frequenza di ripetizione $f_R = 2kHz$ e rimane valida l'analisi fatta in (B). Si ottiene ancora un miglioramento del fattore

$$F_B \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} \approx 28,3$$

In conclusione, in questo caso l'ampiezza minima misurabile con filtraggio mediante BI è

$$\left(V_{P\min}\right)_{BI2} = \frac{1}{F_B}\left(V_{P\min}\right)_{GI2} = \frac{1}{F_B F_{G2}}\left(V_{P\min}\right)_{NF2} \approx \frac{1}{F_B F_{G2}}\sqrt{\overline{n_{B2}^2}} \approx 0,74\mu V$$