PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Segnale a impulso rettangolare

Ampiezza: V_S variabile, da misurare

Durata: $T_P = 20\ \mu s$

Rumore

$\sqrt{S_B} = 20\, nV/\sqrt{Hz}$ densità efficace di potenza (unilatera) limitata da polo a $f_n = 100MHz$

$f_c = 6kHz$ frequenza d'angolo del rumore *1/f*

(A) Misura di ampiezza di impulso con filtro ottimo

La banda del rumore $\frac{\pi}{2} f_n \approx 157MHz$ è molto maggiore di quella del segnale $f_P = \frac{1}{2T_P} = 25\,kHz$ (unilatera) e quindi il rumore si può considerare bianco. Pertanto filtro ottimo è il filtro adattato (matched filter), che ha funzione peso eguale al segnale (cioè costante $w_o = \frac{1}{T_P}$ in corrispondenza al segnale, zero altrove). In questo caso è realizzabile con un Gated Integrator (GI).

La banda di rumore f_{no} del GI è nota $f_{no} = \frac{1}{2T_P} = 25\,kHz$ e il rumore filtrato risulta

$$\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}} = S_B^{1/2} f_{no}^{1/2} = S_B^{1/2}\sqrt{\frac{1}{2T_P}} \approx 3,2\mu V$$

Il segnale in uscita dal filtro adattato ha ampiezza V_S e quindi l'ampiezza minima misurabile, corrispondente a $\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{V_S}{\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}} = 1$ risulta

$$V_{S,\min o} = \sqrt{\overline{n_{Bo}^2}} \approx 3,2\mu V$$

Per confronto, misurando l'impulso senza alcun filtraggio si ottiene un risultato peggiore per un fattore circa 80

$$\sqrt{\overline{n_{Bn}^2}} = S_B^{1/2}\sqrt{\frac{\pi}{2} f_n} \approx 250\mu V$$

$$V_{S,\min n} = \sqrt{\overline{n_{Bn}^2}} \approx 250\mu V$$

(B) Misura di ampiezza di impulso con filtro passabasso a 1 polo semplice

B1) Filtro RC con banda di rumore uguale al filtro ottimo

Il filtro passabasso RC a 1 polo con costante di tempo $T_F = RC$ ha

risposta alla δ $h_1(t) = \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}}$ funzione peso $w_1(\alpha) = h_1(t_m - \alpha)$

autocorrelazione $k_{hh,1}(\tau) = k_{ww,1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)\, h_1(t+\tau)\, dt$

rumore filtrato $\overline{n_{B1}^2} = S_B \int_0^\infty \left|H_1(f)\right|^2 df$ (NB: integrale da 0 a ∞ perchè S_B è uniltera)

ovvero $\overline{n_{B1}^2} = S_B \frac{1}{2}\int_0^\infty h_1^2(t)\,dt = S_B \frac{1}{2} k_{hh,1}^2(0)$

La banda di rumore del filtro f_{n1} è definita da $\overline{n_{B1}^2} = S_B f_{n1}$ e quindi risulta

$f_{n1} = \frac{1}{2} k_{hh,1}^2(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{T_F^2} e^{-\frac{2t}{T_F}} dt = \frac{1}{4T_F}$ (unilatera)

Scegliendo $T_F = \frac{T_P}{2}$ la banda di rumore è eguale a quella del filtro ottimo, di conseguenza è eguale anche il rumore in uscita

$\overline{n_{B1}^2} = \overline{n_{Bo}^2}$

Per valutare il S/N occorre valutare anche il segnale in uscita $u_1(t)$, che possiamo ricavare dalla risposta al gradino del filtro

$$y_{G1}(t) = \int_0^t h_1(\alpha)\,d\alpha = \int_0^t \frac{1}{T_F} e^{-\frac{\alpha}{T_F}} d\alpha = 1(t)\left[1-\exp\left(-t/T_F\right)\right]$$

decomponendo il segnale rettangolare di ingresso in un gradino positivo a t=0 e un gradino negativo a $t=T_P$ e ricavando l'uscita come composizione delle corrispondenti risposte

$$u_1(t) = V_S \cdot y_{G1}(t) - V_S \cdot y_{G1}(t-T_P) = V_S 1(t)\left[1-e^{-\frac{t}{T_F}}\right] - V_S 1(t-T_P)\left[1-e^{-\frac{t-T_P}{T_F}}\right]$$

È chiaro che il massimo $u_{1,max}$ si ha a $t=T_F$ e risulta inferiore a V_p

$$u_{1,\max} = V_S\left[1-\exp\left(-T_P/T_F\right)\right] < V_S$$

Pertanto abbiamo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{u_{1,\max}}{\sqrt{\overline{n_{B1}^2}}} = \frac{V_S\left[1-\exp\left(-T_P/T_F\right)\right]}{S_B^{1/2}\sqrt{\frac{1}{4T_F}}}$$

Con $T_F = \frac{T_P}{2}$ si ottiene S/N peggiore dell'ottimo circa del 13%

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{V_S\left[1-\exp(-2)\right]}{S_B^{1/2}\sqrt{\frac{1}{2T_P}}} = \frac{V_S\left[1-0,135\right]}{\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}} = \left(\frac{S}{N}\right)_o \left[1-0,135\right] = \left(\frac{S}{N}\right)_o 0,865$$

l'ampiezza minima risulta corrispondentemente maggiore dell'ottimo

$$V_{S,\min 1} = \frac{\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}}{0,865} \approx 3,7\,\mu V$$

l’obiettivo di ottenere almeno il 90% dell’ottimo NON è raggiunto.

B2) Possibilità di miglioramento con diversa costante di tempo

Utilizzando l’espressione di S/N valida per qualsiasi costante di tempo si verifica che il S/N migliora aumentando la costante di tempo oltre $T_F = 0,5\ T_P$. Possiamo mettere in evidenza il rapporto $T_P/T_F = \lambda$ e il rapporto S/N ottimo $(S/N)_o$ scrivendo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \left(\frac{S}{N}\right)_o \frac{\left[1-\exp(-\lambda)\right]}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = \left(\frac{S}{N}\right)_o f(\lambda)$$

$T_F = \frac{T_P}{2}$ corrisponde a λ=2 e come visto si ha $f(\lambda)=0,865$. Con calcoli numerici si verifica che

aumentando $T_F > \frac{T_P}{2}$ (cioè diminuendo λ<0,865) si migliora il S/N, perchè sia il denominatore che il numeratore diminuiscono, ma il denominatore diminuisce di più (cioè diminuiscono segnale e rumore, ma il rumore diminuisce più rapidamente). Tracciando $f(\lambda)$ con calcoli numerici si verifica che $f(\lambda)$ ha un massimo $max[f(\lambda)]=0,901$ piuttosto largo centrato su $\lambda=1,25$. Utilizzando $T_F = T_P /1,25= 0,8\ T_P$ si ottiene un risultato più vicino all’ottimo, quasi il 90% dell’ottimo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \left(\frac{S}{N}\right)_o 0,901$$

$$V_{S,\min 1} = \frac{\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}}{0,901} \approx 3,55\,\mu V$$

(C) <u>Misura di ampiezza di impulso con filtro passabasso a 2 poli coincidenti</u>

C1) Filtro RC-RC con banda di rumore uguale al filtro ottimo

La risposta alla δ del filtro passabasso a due stadi RC in cascata eguali con costante di tempo $T_F = RC$ si può ricavare sia da convoluzione delle risposte dei due stadi che dalla funzione di trasferimento mediante il suo sviluppo in frazioni (sviluppo di Heaviside).

$$h_2(t) = h_1(t) * h_1(t) = \frac{1}{T_F^2}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{T_F}} e^{-\frac{t-\tau}{T_F}} d\tau = \frac{t}{T_F^2} e^{-\frac{t}{T_F}} \qquad \text{funzione peso} \qquad w_2(\alpha) = h_2(t_m - \alpha)$$

Il rumore in uscita è

$$\overline{n_{B2}^2} = S_B \frac{1}{2}\int_0^\infty h_2^2(t)\,dt = S_B \frac{1}{2} k_{hh,2}^2(0)$$

La banda banda di rumore è definita da da $\overline{n_{B2}^2} = S_B f_{n2}$ e quindi risulta

$$f_{n2} = \frac{1}{2} k_{hh,2}^2(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{T_F^2} e^{-\frac{2t}{T_F}} dt = \frac{1}{8T_F} \quad \text{(banda unilatera)}$$

Dunque scegliendo $T_F = \frac{T_P}{4}$ la banda di rumore e il rumore in uscita sono eguali a quelli del filtro ottimo

$$\overline{n_{B2}^2} = \overline{n_{Bo}^2}$$

Ricaviamo il segnale di uscita procedendo come nel caso di RC semplice. La risposta al gradiono dello RC-RC è

$$z_{G2}(t) = \int_0^t h_2(\alpha)\, d\alpha = \int_0^t \frac{\alpha}{T_F^2} e^{-\frac{\alpha}{T_F}} d\alpha = 1(t)\left[1 - \exp(-t/T_F) - \frac{t}{T_F}\exp(-t/T_F)\right]$$

e il segnale in uscita è

$$u_2(t) = V_S \cdot z_{G2}(t) - V_S \cdot z_{G2}(t - T_P) = V_S 1(t)\left[1 - e^{-\frac{t}{T_F}} - \frac{t}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}}\right] - V_S 1(t - T_P)\left[1 - e^{-\frac{t-T_P}{T_F}} - \frac{t - T_P}{T_F} e^{-\frac{t-T_P}{T_F}}\right]$$

Con $T_F < T_P$ il massimo si ha con buona approssimazione ancora in corrispondenza alla fine del rettangolo, cioè per $t=T_P$ e vale

$$u_{2,\max} = V_P\left[1 - \exp(-T_P/T_F) - \frac{T_P}{T_F}\exp(-T_P/T_F)\right] < V_S$$

quindi con la scelta fatta $\frac{T_P}{T_F} = 4$ si ha

$$u_{2,\max} = V_P\left[1 - 0{,}0183 - 0{,}0732\right] \approx V_P \cdot 0{,}915$$

Dato che il rumore filtrato è eguale a quello ottenuto con il filtro ottimo, si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)_2 = \left(\frac{S}{N}\right)_o 0{,}915$$

$$V_{S,\min 2} = \frac{\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}}{0{,}915} \approx 3{,}5\mu V$$

Dunque il risultato è pari al 91,5% dell’ottimo e l’obiettivo è raggiunto.

La conclusione raggiunta (che il risultato del filtro RC-RC è migliore di quello ottenuto con il filtro RC semplice con eguale banda di rumore) risulta intuitivamente spiegabile confrontando le funzioni peso dei due filtri. Risulta infatti evidente anche dai grafici delle funzioni che la funzione peso dello RC-RC approssima meglio la funzione peso del filtro ottimo rispetto a quella dello RC semplice.

(D) Misura di ampiezza di impulso in presenza di rumore 1/f

Considerando di utilizzare il filtro RC-RC visto, esaminiamo una situazione in cui è presente anche una componente di rumore 1/f con frequenza d'angolo f_c (cioè con spettro $S_f = S_B f_c \frac{1}{f}$), che aggiunge al rumore bianco $\sqrt{\overline{n_{Bo}^2}}$ =3,2 μV un contributo $\sqrt{\overline{n_f^2}}$. Per limitare questo contributo di rumore *1/f* occorre avere anche un filtraggio passa-alto: indichiamo con f_i la sua frequenza di taglio. Il filtro passabasso pone una frequenza di taglio superiore f_s ; che nel caso considerato è $f_s = f_{no}$ =25kHz. Se le due frequenze di taglio sono molto diverse (rapporto f_s / f_i >> 10) si può valutare il valore efficace $\sqrt{\overline{n_f^2}}$ del rumore 1/f con l'approssimazione a taglio netto

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx \sqrt{\int_{f_i}^{f_s} \frac{S_B f_c}{f} df} = \sqrt{S_B f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} = S_B^{1/2} \cdot f_c^{1/2} \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} = 1\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)}$$

Tenendo conto che nel caso considerato abbiamo

$f_s = f_{no}$ =25kHz

$S_B^{1/2} \cdot f_c^{1/2} = 1,6\mu V$

abbiamo

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx S_B^{1/2} \cdot f_c^{1/2} \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} = 1,6\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{25000}{f_i}\right)}$$

e possiamo confrontare i risultati ottenibili con i vari tipi di filtraggio proposti, valutandone per ciascuno la frequenza di taglio f_i ottenuta.

D1) Filtraggio passa-alto con azzeramento iniziale dello offset di linea di base

Tra azzeramento e misura vi è un intervallo di almeno $T_I \approx$ 10 o 20 minuti, cioè $T_D \geq$ 1000s. La frequenza di taglio inferiore è $f_i \approx 1/ T_I \leq$ *1mHz* e risulta un rumore 1/f

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 1,6\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{25000}{f_i}\right)} \geq 6,6\mu V$$

nettamente maggiore del rumore bianco $\sqrt{\overline{n_{B2}^2}} = 3,2\mu V$. Questo filtraggio è insoddisfacente.

D2) Filtraggio passa-alto con filtro differenziatore CR a parametri costanti.

Il filtro differenziatore CR a parametri costanti ha costante di tempo caratteristica T_D e frequenza di taglio f_i eguale a quella del polo $f_i = f_D = \frac{1}{2\pi T_D}$

Occorre tener conto dello sfavorevole effetto del differenziatore sul segnale, cioè della diminuzione di ampiezza dell'impulso in uscita. Per limitarla è evidente che occorre scegliere T_D >> T_P . Ragionando in frequenza (con funzione di trasferimento o funzione peso) o in tempo (con risposta alla δ o funzione peso) si valuta che il fattore di diminuzione prodotto da $T_D >> T_P$ è con buona approssimazione $\approx \left(1-\frac{T_P}{T_D}\right)$ cioè si ha una perdita relativa di ampiezza data da T_P / T_D .

Scegliamo pertanto $T_P / T_D \leq 1/100$, cioè $T_D \geq 2$ ms e quindi abbiamo

$$f_i = f_D = \frac{1}{2\pi T_D} \leq 80Hz$$

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 1,6\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{25000}{f_i}\right)} \geq 3,9\mu V$$

Il rumore 1/f è diminuito, ma è ancora maggiore del rumore bianco Questo filtraggio risulta utile, ma non ben soddisfacente: il rumore totale risulta quasi il doppio del rumore bianco

$$\sqrt{\overline{n_T^2}} = \sqrt{\overline{n_{B2}^2} + \overline{n_f^2}} \geq 5\mu V$$

D3) Filtraggio passa-alto con differenziatore CR a parametri commutati o BaseLine Restorer (BLR)

Nel BLR la differenziazione viene sospesa all'inizio dell'impulso dall'apertura dello switch in serie alla resistenza, che commuta la costante di tempo di differenziazione dal valore T_D scelto a $T_D \rightarrow \infty$. Pertanto il filtraggio passa-alto non agisce sull'impulso e non vi è riduzione di ampiezza dell'impulso, nemmeno con T_D paragonabile alla durata dell'impulso T_P . Vi è invece un notevole effetto sul rumore: esaminando la funzione peso del BLR e il suo effetto, si conclude che il miglior risultato si ottiene scegliendo

$T_D \approx 10\ T_p \approx 200$ µs

che produce una frequenza di taglio passalto

$f_i = 1/2\pi(T_D + T_P) \approx 720\ Hz$

Il contributo di rumore *1/f*

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 1,6\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{25000}{f_i}\right)} = 3\mu V$$

è ora poco inferiore al rumore bianco $\sqrt{\overline{n_{B2}^2}} = 3,2\mu V$ e l'obiettivo è raggiunto. Il rumore totale è

$$\sqrt{\overline{n_T^2}} = \sqrt{\overline{n_{B2}^2} + \overline{n_f^2}} \approx 4,4\mu V$$