PROBLEMA 1

Quadro dei dati

SEGNALE A IMPULSO

$s_i(t) = V_P \sin\left(\frac{\pi t}{T_P}\right)$ nell'intervallo $0 < t < T_P = 10\mu s$

RUMORE BIANCO

$\sqrt{S_u} = 20nV/\sqrt{Hz}$ unilatera (cioè $\sqrt{S_b} = 10nv/\sqrt{Hz}$ bilatera)

FILTRI INTEGRATORI COMMUTATI

Filtro passivo	$R_1 = 10k\Omega$	C_1 *da scegliere*	$T_{F1} = R_1 C_1$
Filtro attivo	$R_2 = 100k\Omega$ $R_3 = 1k\Omega$	C_2 *da scegliere*	$T_{F2} = R_2 C_2$

IMPULSI RIPETITIVI

in (b) a frequenza fissa f_R=*100 Hz*

in (c) a frequenza variabile f_R *da 100 Hz a 200Hz*

RUMORE 1/f

in (d) presente con frequenza d'angolo caratteristica f_c= *50kHz*

(A) Misura di singolo impulso

A1) Segnale, rumore e S/N

Con rumore bianco il filtro ottimo ha funzione peso con forma eguale al segnale. Utilizzando i filtri indicati l'ottimo si può approssimare con una funzione rettangolare di eguale durata T_P . Per realizzarlo occorre avere peso approssimativamente costante in T_P e quindi occorre avere costante di tempo del filtro (T_{F1} o T_{F2}) molto maggiore della durata T_P . Pettanto scegliamo

$T_{F1} = T_{F2} = T_F = 100\ T_P = 1ms$

e quindi

C_1 = 100 nF e C_2 = 10 nF

La funzione peso dunque ha con buona approssimazione ampiezza g costante

per il filtro passivo $w_g(t) = g_1 = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{T_F}$ nell'intervallo $0 < t < T_P = 10\mu s$

per il filtro attivo $w_g(t) = g_2 = \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{R_2 C_2} = \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{T_F}$ nell'intervallo $0 < t < T_P = 10\mu s$

All'uscita del filtro si ha

Segnale $s_g = \int_0^{T_P} w_g(t) s_i(t)\,dt = V_P g \int_0^{T_P} \sin\left(\frac{\pi}{T_P}t\right)dt = V_P g T_P \frac{2}{\pi}$

Rumore $\overline{n_g^2} = S_b \cdot k_{ww}(0) = S_b \cdot g^2 T_P$ (con densità bilatera $S_b = S_u/2$)

S/N $\frac{S}{N} = \frac{s_g}{\sqrt{\overline{n_g^2}}} = V_P \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{S_b}}$

A2) Confronto tra i due filtri

1) Rapporto S/N: risulta eguale per i due filtri (non dipende da *g*)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_g = \frac{s_g}{\sqrt{\overline{n_g^2}}} = V_P \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{S_b}}$$

2) ampiezza del minimo impulso di ingresso misurabile: è eguale per i due filtri

$$V_{P\min,g} = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{S_b}}{\sqrt{T_P}} \approx 7\,\mu V$$

3) Segnale in uscita:

Ampiezza:

quella dell'integratore passivo è molto minore di quella dell'integratore attivo (a pari ampiezza V_P dell'impulso di ingresso)

integratore passivo $$s_{g1} = V_P g_1 T_P \frac{2}{\pi} = V_P \frac{T_P}{T_F}\frac{2}{\pi} = V_P \cdot 6,3 \cdot 10^{-3}$$

integratore attivo $$s_{g2} = V_P g_2 T_P \frac{2}{\pi} = V_P \frac{T_P}{T_F}\frac{R_2}{R_3}\frac{2}{\pi} = s_{g1}\frac{R_2}{R_3} = 100 s_{g1} = V_P \cdot 0,63$$

Avere un segnale più alto è utile per l'elettronica che segue, in quanto risulta soggetta a requisiti meno stringenti di rumore riferito al suo ingresso e di amplificazione necessaria per adeguare il segnale alla dinamica dello strumento di misura che segue (tipicamente un ADC).

Forma d'onda:

Nel filtro passivo l'uscita disponibile dopo l'acquisizione è una tensione costante (il condensatore C_1 è in una maglia aperta e quindi non può scaricarsi). Nel filtro attivo l'uscita disponibile dopo l'acquisizione è una tensione che decade esponenzialmente con costante di tempo T_F = 100 T_P = 1ms (il condensatore C_2 è in una maglia chiusa e si scarica attraverso R_2). Tuttavia ai fini della misura questo lento decadimento non risulta importante: una misura elettronica è effettuata in un tempo breve rispetto a tale decadimento e in esso la tensione è praticamente costante.

A3) Confronto con il filtro ottimo

$$w_{op}(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{T_P}\right)$$ nell'intervallo $$0 < t < T_P = 10\,\mu s$$

Segnale $$s_{op} = \int_0^{T_P} w_{op}(t)\, s_i(t)\, dt = V_P \int_0^{T_P} \sin^2\left(\frac{\pi}{T_P}t\right) dt = V_P \frac{T_P}{2}$$

Rumore $$\overline{n_{op}^2} = S_b \cdot k_{ww,op}(0) = S_b \cdot \int_0^{T_P} \sin^2\left(\frac{\pi}{T_P}t\right) dt = S_b \frac{T_P}{2}$$ (con densità bilatera $S_b = S_u/2$)

S/N $$\left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{s_{op}}{\sqrt{\overline{n_{op}^2}}} = V_P \frac{\sqrt{\frac{T_P}{2}}}{\sqrt{S_b}}$$

Ampiezza minima misurabile ottima $$V_{P\min,op} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{S_b}}{\sqrt{T_P}} \approx 6,2\,\mu V$$

Il filtraggio con integratore dà un risultato peggiore del filtraggio ottimo, ma solo di poco

$$\frac{V_{P\min,g}}{V_{P\min,op}} \approx 1{,}13$$

(B) <u>Misura con impulsi ripetitivi a frequenza costante f_R= *100Hz*</u>

Si può migliorare il S/N sfruttando la ridondanza dell'informazione data dagli impulsi, cioè effettuando l'acquisizione su ciascun impulso della sequenza (chiudendo lo switch in corrispondenza a ogni impulso) e lasciando che il filtro integratore accumuli l'informazione acquisita. Va però tenuto presente che nella sequenza l'ampiezza V_P degli impulsi può essere considerata costante solo su intervalli di tempo fino a T_A=10s e pertanto occorre dimensionare il filtro in modo che il peso risulti trascurabile (<0,01) per i tempi che precedono di oltre 10s l'istante di misura.

B1 Filtro passivo

Da un impulso all'impulso precedente la funzione peso è più piccola del fattore

$$r = \exp\left(-\frac{T_P}{T_{F1}}\right) \approx 1 - \frac{T_P}{T_{F1}}$$

<u>indipendente dalla frequenza di ripetizione f_R</u>. Il filtro è un <u>BOXCAR INTEGRATOR (BI).</u>

Il BI effettua un filtraggio a media esponenziale con ragione r dei campioni acquisiti dal GI. Il risultato migliora aumentando il numero di campioni, ma occorre impiegare solo i campioni disponibili entro l'intervallo di 10s in cui si può considerare costante l'ampiezza dell'impulso. Con frequenza $f_R = 100Hz$, periodo $T_R = 10ms$, in 10s vi sono N_c=1000 impulsi. Per avere funzione peso trascurabile per gli impulsi precedenti oltre 10s occorre

$$r^{N_C} = \exp\left(-\frac{N_c T_p}{T_{F1}}\right) \le 1/100 \quad \text{cioè occorre} \qquad \frac{N_c T_p}{T_{F1}} \ge 4{,}6 \quad \text{e quindi} \quad T_{F1} \le \frac{N_c T_P}{4{,}6} = 2{,}17ms$$

Con la costante T_{F1} = 1ms già scelta per il GI questa condizione è soddisfatta, ma il numero di campioni utilizzato è inferiore al disponibile e non si ottiene tutto il miglioramento possibile. Conviene aumentare T_{F1} rispettando la condizione: perciò per il BI scegliamo T_{F1} = 2ms e quindi C_1= 200nF.

Notiamo che il GI con costante di tempo $T_{F1} = 2ms$ rispetto al caso visto in A con $T_{F1} = 1ms$ avrebbe eguale S/N e segnale di uscita ridotto di un fattore 2. Utilizzando però il filtro come BI

aumenta il segnale di uscita del fattore $\quad \dfrac{1}{1-r} \approx \dfrac{T_{F1}}{T_P} = 200$

aumenta il rumore di uscita del fattore $\quad \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} \approx \sqrt{\dfrac{T_{F1}}{2T_P}} = 10$

aumenta il S/N del fattore $\quad \dfrac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} \approx \sqrt{\dfrac{2}{1-r}} = \sqrt{\dfrac{2T_{F1}}{T_P}} = 20$

Il miglioramento del S/N riduce <u>l'ampiezza minima di impulso misurabile</u>

$$V_{P\min,BI} = V_{P\min,g}\frac{1-r}{\sqrt{1-r^2}} \approx \frac{V_{P\min,g}}{20} \approx 350nV$$

<u>La tensione di segnale in uscita dal BI</u> aumenta notevolmente rispetto a quella data dal GI: con il BI essa risulta eguale al valor medio dell'impulso di ingresso nell'intervallo T_P

$$s_{BI} = s_{g1}\frac{1}{1-r} \approx V_P \frac{T_P}{T_{F1}}\frac{T_{F1}}{T_P} = V_P \frac{2}{\pi}$$

B2 Filtro attivo

Da un impulso all'impulso precedente la funzione peso decresce del fattore

$$r = \exp\left(-\frac{T_R}{T_{F2}}\right) \approx 1 - \frac{T_R}{T_{F2}} = 1 - \frac{1}{f_R T_{F2}}$$

che ora <u>**dipende dalla frequenza di ripetizione f_R**</u>, cioè il filtro funziona da <u>RATEMETER INTEGRATOR (RI)</u>.

Per avere funzione peso trascurabile per gli impulsi precedenti oltre 10s occorre

$$\exp\left(-\frac{10s}{T_{F2}}\right) \le 1/100$$

e per questo occorre che sia $\frac{10s}{T_{F2}} \ge 4,6$ cioè $T_{F2} \le \frac{10s}{4,6} = 2,17s$.

Scegliamo quindi per il RI scegliamo $T_{F2}=2s$ e quindi $C_2=20\mu F$

Notiamo che il GI con costante di tempo $T_{F1} = 2s$ rispetto al caso visto in A con $T_{F1} = 1ms$ avrebbe eguale S/N e segnale di uscita ridotto di un fattore 2000. Utilizzando il filtro come RI invece che GI

aumenta il segnale di uscita del fattore $\frac{1}{1-r} \approx \frac{T_{F2}}{T_R} = f_R T_{F2} = 200$

aumenta il rumore di uscita del fattore $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \approx \sqrt{\frac{T_{F2}}{2T_R}} = \sqrt{\frac{f_R T_{F2}}{2}} = 10$

aumenta il S/N del fattore $\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_{F2}}{T_R}} = \sqrt{2 f_R T_{F2}} = 20$

Il miglioramento di S/N riduce <u>l'ampiezza minima di impulso misurabile</u> allo stesso livello del BI

$$V_{P\min,RI} = V_{P\min,g}\frac{1-r}{\sqrt{1-r^2}} \approx \frac{V_{P\min,g}}{20} \approx 350nV$$

La <u>tensione di segnale in uscita</u> dal RI aumenta notevolmente rispetto a quella data dal GI, ma risulta inferiore a quella ottenuta con il BI

$$s_{RI} = s_{g2}\frac{1}{1-r} \approx V_P \frac{T_P}{T_{F2}}\frac{R_2}{R_3}\frac{2}{\pi} = V_P \frac{2}{\pi}\frac{R_2}{R_3}\frac{T_P}{T_R} = V_P \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{10}$$

(C) <u>Misura con impulsi ripetitivi a frequenza f_R non controllabile variabile tra 100Hz a 200Hz</u>

C1 Filtro passivo

In queste condizioni il filtro risulta ancora adatto allo scopo così come dimensionato in (B) senza che occorra alcuna modifica. Infatti:

1) Sia il S/N che l'ampiezza del segnale in uscita NON dipendono dalla frequenza f_R di ripetizione degli impulsi, ma solo dall'ampiezza V_P degli impulsi di ingresso
2) La condizione di avere funzione peso trascurabile per gli impulsi precedenti oltre 10s è ancora soddisfatta se la frequenza f_R aumenta, non occorre cambiare dimensionamento del

filtro. Infatti con f_R > 100Hz il numero di impulsi in 10s cresce N_c>1000 e quindi il peso dato agli impulsi precedenti oltre 10s diminuisce ancora: $r^{N_C} = \exp\left(-\frac{N_c T_p}{T_{F1}}\right) \ll 1/100$

C2 Filtro attivo

Con frequenza di ripetizione variabile il filtro RI non è adatto allo scopo. Infatti i risultati che esso forniscono dipendono non solo dall'ampiezza V_P degli impulsi di ingresso, ma anche dalla frequenza f_R di ripetizione degli impulsi che è variabile e non controllabile. Se con ampiezza dell'impulso di ingresso V_P costante la frequenza f_R varia, la tensione di uscita del filtro varia e si ha una informazione non corretta dell'ampiezza dell'impulso di ingresso V_P .

(D) Ulteriore filtraggio per misura di singolo impulso in presenza di rumore 1/f

Per limitare il contributo del rumore 1/f, oltre al filtraggio passa-basso del filtro integratore occorre anche un filtraggio passa-alto inserito prima del filtro integratore commutato.

Confrontiamo i contributi di rumore bianco e rumore 1/f, valutati all'uscita del GI e riportati all'ingresso del GI dividendoli per il guadagno in continua T_P/T_F , in modo da mettere meglio in evidenza gli effetti delle frequenze di taglio, cioè del taglio f_i del filtraggio passa-alto e di quello passa-basso f_s del GI

$$f_s = \frac{1}{2T_P} = 50kHz$$

Consideriamo i tre casi indicati di filtraggio passa-alto.

D1 Azzeramento della linea di base a inizio del ciclo di misura di 15 minuti

Si effettua a inizio ciclo un F-CDS (filtered correlated double sampling) con il quale si ottiene frequenza di taglio passa-alto circa reciproca della durata del ciclo. Abbiamo quindi

$$f_i \approx 10^{-3}\,Hz$$

Rumore bianco $\overline{n_b^2} \approx S_u(f_s - f_i) \approx S_u f_s$

Essendo molto distanti i limiti di banda f_i e f_s possiamo impiegare l'approssimazione a taglio netto per valutare il rumore *1/f*

$$\overline{n_f^2} \approx S_u f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right) \approx 17,7 \cdot S_u f_c$$

Notiamo che abbiamo $f_s = f_c$ e pertanto $\overline{n_b^2} \approx S_u f_s \approx S_u f_c$ e quindi risulta

$$\overline{n_f^2} \approx 17,7 \cdot \overline{n_b^2}$$

Dunque questo filtraggio è evidentemente inadeguato, il rumore 1/f rimane molto elevato.

D2 Filtro passa-alto CR a parametri costanti

Occorre tener conto anche dell'effetto sul segnale e dimensionare il filtro passa-alto in modo da ridurre molto poco il segnale e quindi anche il S/N. Perciò la costante di tempo del passa-alto deve essere molto maggiore della durata T_P del segnale, quindi scegliamo

$$C_i R_i = 100 T_P = 1ms$$

Con questo abbiamo una frequenza di taglio passa-alto per il rumore 1/f

$$f_i = \frac{1}{2\pi C_i R_i} = \frac{1}{\pi \cdot 100 \cdot 2T_P} = \frac{f_s}{\pi \cdot 100} \approx 159 Hz$$

I limiti di banda sono distanti e possiamo ancora usare l'approssimazione a taglio netto per valutare il rumore 1/f

$$\overline{n_f^2} \approx S_u f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right) \approx 5,75 \cdot S_u f_c \qquad \text{cioè} \qquad \overline{n_f^2} \approx 5,75 \cdot \overline{n_b^2}$$

Il filtraggio del rumore 1/f è migliorato, ma il rumore 1/f è ancora piuttosto elevato e risulta largamente dominante.

D3 Filtro passa-alto a parametri commutati

Per ottenere un risultato migliore occorre avere un filtro passa-alto che tagli maggiormente il rumore 1/f (cioè abbia frequenza di taglio più alta), ma senza tagliare anche il segnale. Occorre quindi usare non un filtro a parametri costanti, ma un filtro passa-alto commutato in modo da non agire sul segnale.

Un approccio possibile è inserire prima del GI un BaseLineRestorer (BLR), cioè un differenziatore CR commutato in modo sospendere la azione di differenziazione nell'intervallo in cui vi è il segnale. Risulta così possibile ridurre la costante di tempo C_iR_i senza ridurre l'ampiezza del segnale. La costante di tempo C_iR_i comunque deve essere alquanto più lunga della durata dell'impulso per evitare un effetto di intensificazione delle componenti di rumore nella banda del segnale, analogo a quello che si verifica utilizzando un semplice CDS (correlated double sampling). Tipicamente si impiega nel BLR

$$C_i R_i \approx 5T_P = 50 \mu s$$

ottenendo così

$$f_i = \frac{1}{2\pi C_i R_i} = \frac{1}{2\pi \cdot 5T_P} = \frac{f_s}{\pi \cdot 5} \approx 3,2 kHz$$

In questo caso i limiti di banda sono distano poco più di una decade e quindi l'approssimazione a taglio netto è abbastanza grezza e fornisce un risultato che sovrastima il contributo del rumore 1/f

$$\overline{n_f^2} \approx S_u f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right) \approx 2,75 \cdot S_u f_c \qquad \text{cioè} \qquad \overline{n_f^2} \approx 2,75 \cdot \overline{n_b^2}$$

È comunque chiaro che questo filtraggio fornisce un risultato nettamente migliore, che potrebbe essere valutato con maggior precisione mediante un calcolo numerico basato sulla funzione peso del BLR.