PROBLEMA 1

Quadro dei dati

SEGNALE IMPULSO ESPONENZIALE

$$i_p = Q_p \frac{1}{T_p} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_p}\right) \qquad \text{ovvero} \qquad I_p = Q_p \frac{1}{1 + j\omega T_p}$$

con $T_P = 1\mu s$

PREAMPLIFICATORE

$\sqrt{S_v} = 10 nV/\sqrt{Hz}$ unilatera (cioè $\sqrt{S_{vb}} = \sqrt{\frac{S_v}{2}} = 7{,}1 nV/\sqrt{Hz}$ bilatera)

$\sqrt{S_i} = 0{,}01 pA/\sqrt{Hz}$ unilatera (cioè $\sqrt{S_{ib}} = \sqrt{\frac{S_i}{2}} = 0{,}007 pA/\sqrt{Hz}$ bilatera)

C_L = 1 pF (totale, inclusa quella del rivelatore)

DISTURBO DA INTERFERENZA ELETTROMAGNETICA

Disturbo sinusoidale con frequenza f_d = 400 kHz nota con incertezza ±1%
con ampiezza all'ingresso del preamplificatore $V_d \approx 100\ \mu V$

(A) FILTRAGGIO OTTIMO

ω_{nc} Noise corner $\qquad S_v = \dfrac{S_i}{\omega_{nc}^2 C_L^2} \qquad \omega_{nc} = \dfrac{\sqrt{S_i}}{C_L \sqrt{S_v}} \qquad T_{nc} = \dfrac{1}{\omega_{nc}} = \dfrac{C_L \sqrt{S_v}}{\sqrt{S_i}} = 1\mu s$

Rumore totale $\qquad S_T = S_v + \dfrac{S_i}{\omega^2 C_L^2} = S_v \dfrac{1 + \omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$

Filtro ottimo = Filtro che "sbianca" il rumore seguito da filtro adattato al segnale.

Filtro sbiancante

differenziatore con costante di tempo T_{nc}

$H_b = \dfrac{j\omega T_{nc}}{1 + j\omega T_{nc}} \qquad$ quindi $\qquad |H_b|^2 = \dfrac{\omega^2 T_{nc}^2}{1 + \omega^2 T_{nc}^2} \qquad$ il rumore in uscita è S_v

Con segnale di corrente deltiforme $i_\delta = Q_p \delta(t)$ il segnale in uscita del filtro sarebbe

$$v_\delta = \frac{Q_p}{C_L} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right) \qquad \text{ovvero} \qquad V_\delta = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{1}{1 + j\omega T_{nc}}$$

Quindi con segnale esponenziale $i_p = Q_p \frac{1}{T_p} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_p}\right)$ il segnale in uscita del filtro sbiancante è

$$v_b = v_\delta(t) * \frac{1}{T_p} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_p}\right) \qquad \text{ovvero} \qquad V_b = V_\delta(\omega) \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_p}$$

Nel caso attuale il calcolo risulta semplificato perchè $T_{nc} = T_p$

nella trasformata di Laplace si ha $V_b = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{1}{1+sT_{nc}} \frac{1}{1+sT_p} = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{1}{\left(1+sT_{nc}\right)^2}$

e nel tempo

$$v_b = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{1}{T_{nc}} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right) * \frac{1}{T_p} 1(t) \exp\left(-\frac{t}{T_p}\right) = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{t}{T_{nc}^2} \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right) = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} b(t)$$

b(t) è la forma del segnale normalizzato ad area unitaria

$$b(t) = \frac{t}{T_{nc}^2} \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right)$$

che ha il suo massimo b_{max} al tempo $t=T_{nc}$

$$b_{\max} = b\left(T_{nc}\right) = \frac{1}{e}$$

Filtro adattato

Funzione peso = segnale normalizzato ad area unitaria

$$w_m(t) = b(t)$$

Rapporto S/N ottimo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_b(t)\, w_m(t)\, dt}{\sqrt{S_{vb}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w_m^2(t)\, dt}} = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\, dt}}{\sqrt{S_{vb}}}$$

e calcolando $\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{T_{nc}^4} \exp\left(-\frac{2t}{T_{nc}}\right) dt = \frac{1}{4T_{nc}}$

si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \frac{1}{\sqrt{4T_{nc}} \sqrt{S_{vb}}} = \frac{Q_p}{C_L} \frac{\sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{2S_v}}$$

La minima carica misurabile $Q_{p\min,op}$ corrisponde a S/N=1 e vale in Coulomb

$$Q_{p\min,op} = C_L \frac{\sqrt{2S_v}}{\sqrt{T_{nc}}} \approx 1{,}41 \cdot 10^{-17} C = 14{,}1\, aC$$

ovvero in numero di elettroni

$$N_{e\min,op} = \frac{Q_{p\min,op}}{q} \approx 88 \ \textit{elettroni}$$

(B) <u>GATED INTEGRATOR COME APPROSSIMAZIONE DEL FILTRO ADATTATO</u>

B1) Scelta intuitiva del tempo di integrazione T_G

Confrontiamo la funzione peso ottimale $w_{op}(t)=b(t)$ con la funzione peso del GI normalizzata ad area unitaria $w_G(t)$ e cerchiamo di individuare un tempo di integrazione T_G che faccia di $w_G(t)$ una buona approssimazione di *b(t)*. Notando che

- *b(t)* raggiunge al tempo $t=T_{nc}$ l'ampiezza massima $b_{\max} = \frac{1}{eT_{nc}} = \frac{1}{2,72 \cdot T_{nc}}$ poi scende esponenzialmente con la costante di tempo T_{nc} , quindi ha approssimativamente una durata $\approx 3T_{nc}$
- $w_G(t)$ ha ampiezza costante $\frac{1}{T_G}$ da $t=0$ a $t=T_G$

si può stimare che utilizzando un valore di T_G compreso nell'intervallo

$$2,5T_{nc} < T_G < 3,5T_{nc}$$

si ottiene una $w_G(t)$ che ha ampiezza e durata abbastanza simili all'ottimo *b(t)*. Scegliamo

$$T_G = 3T_{nc}$$

B2) S/N ottenibile con il GI in funzione del T_G utilizzato

Il segnale all'uscita del GI è

$$u_G = \int_0^{T_G} v_b(t)\, w_G(t)\, dt = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L} \int_0^{T_G} b(t) \frac{1}{T_G} dt = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L T_G} \int_0^{T_G} \frac{t}{T_{nc}^2} \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right) dt$$

Integrando per parti ricaviamo

$$\int_0^{T_G} \frac{t}{T_{nc}^2} \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right) dt = 1 - \left[1 + \frac{T_G}{T_{nc}}\right] \exp\left(-\frac{T_G}{T_{nc}}\right)$$

quindi

$$u_G = \frac{Q_p T_{nc}}{C_L T_G} \left\{1 - \left[1 + \frac{T_G}{T_{nc}}\right] \exp\left(-\frac{T_G}{T_{nc}}\right)\right\}$$

Il rumore in uscita dal GI è

$$\sqrt{\overline{n_G^2}} = \frac{\sqrt{S_v}}{\sqrt{2T_G}}$$

Perciò

$$\left(\frac{S}{N}\right)_G = \frac{u_G}{\sqrt{\overline{n_G^2}}} = \frac{Q_p}{C_L} \frac{T_{nc}}{T_G} \frac{\sqrt{2T_G}}{\sqrt{S_v}} \left\{1 - \left[1 + \frac{T_G}{T_{nc}}\right] \exp\left(-\frac{T_G}{T_{nc}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{Q_p}{C_L} \frac{\sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{2S_v}} \frac{\sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{T_G}} 2 \left\{1 - \left[1 + \frac{T_G}{T_{nc}}\right] \exp\left(-\frac{T_G}{T_{nc}}\right)\right\} =$$

$$= \left(\frac{S}{N}\right)_{op} 2 \frac{\sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{T_G}} \left\{1 - \left[1 + \frac{T_G}{T_{nc}}\right] \exp\left(-\frac{T_G}{T_{nc}}\right)\right\}$$

Con calcoli numerici verifichiamo che:

con $T_G=3T_{nc}$ si ottiene $\left(\frac{S}{N}\right)_G = 0,924 \left(\frac{S}{N}\right)_{op}$ perciò minima carica misurabile

$$Q_{p\min,G} = \frac{Q_{p\min,op}}{0,924} \approx 1,53 \cdot 10^{-17} C$$

con T_G=2,5T_{nc} si ottiene $\left(\frac{S}{N}\right)_G = 0,901\left(\frac{S}{N}\right)_{op}$ perciò minima carica misurabile

$$Q_{p\min,G} = \frac{Q_{p\min,op}}{0,901} \approx 1,56 \cdot 10^{-17} C$$

con T_G=3,5T_{nc} si ottiene $\left(\frac{S}{N}\right)_G = 0,923\left(\frac{S}{N}\right)_{op}$ perciò minima carica misurabile

$$Q_{p\min,G} = \frac{Q_{p\min,op}}{0,923} \approx 1,53 \cdot 10^{-17} C$$

Risulta confermato che l'approssimazione ottenuta scegliendo T_G=3T_{nc} è buona, dato che permette di arrivare al 92,4% dell'ottimo. Si vede inoltre che la scelta non è critica, dato che con altri valori di T_G nell'intervallo considerato $2,5T_{nc} < T_G < 3,5T_{nc}$ si ottengono risultati quasi equivalenti.

(C) MODIFICHE DEL FILTRAGGIO PER ATTENUARE IL DISTURBO A RADIOFREQUENZA

Il disturbo indotto all'ingresso del preamplificatore viene molto poco filtrato dal filtro sbiancante, che è un passa-alto con frequenza di taglio f_b inferiore a quella del disturbo

$$f_b = \frac{1}{2\pi T_{nc}} \approx 159kHz$$

Il GI invece esegue un filtraggio passabasso con taglio equivalente a quello di un passabasso RC con costante di tempo RC=T_G/2, quindi con frequenza di taglio passabasso

$$f_G = \frac{1}{\pi T_G} \qquad \text{cioè} \quad f_G \approx 106kHz \quad \text{con } T_G = 3T_{nc} = 3\mu s$$

Inoltre la funzione peso del GI ha zeri alle frequenze multiple intere di 1/T_G

$$f_{zn} = \frac{n}{T_G} \qquad \text{cioè} \quad f_{zn} = n \cdot 333kHz \quad \text{con } T_G = 3T_{nc} = 3\mu s$$

Se si modifica T_G in modo da far corrispondere alla frequenza del disturbo uno zero della funzione peso, in linea di principio l'effetto del disturbo può essere annullato. Nel nostro caso possiamo ottenere questo risultato riducendo lievemente il tempo di integrazione a

$$T_G = 2,5T_{nc} \qquad \text{che porta il primo zero della funzione a} \quad f_{z1} = \frac{1}{T_G} = 400kHz = f_d$$

Abbiamo già verificato che questa scelta di T_G = 2,5μs fornisce un buon S/N, poco inferiore a quello ottenibile con la prima scelta T_G =3μs.

Nella realtà ci può essere però uno scostamento Δf tra lo zero f_z della funzione peso e la frequenza del disturbo per diversi motivi (perchè la frequenza del disturbo è nota con incertezza; perchè il T_G non è controllato esattamente, ecc.). In questi casi il disturbo non viene annullato, ma solo ridotto, cioè passato con un peso residuo che occorre stimare.

Considerando che lo scostamento relativo sia piccolo $\Delta f << f_z$ si può valutare con approssimazione al primo ordine il disturbo residuo all'uscita del GI causato dallo scostamento in frequenza:

$W_G = \dfrac{\sin(\pi f T_G)}{\pi f T_G}$ quindi al primo ordine $\left|\dfrac{dW_G}{df}\right|_{f=f_z} = \dfrac{1}{f_z}$

Possiamo concludere che il peso residuo ΔW_G dato al disturbo è pari allo scostamento relativo in frequenza

$$\Delta W_G \approx \frac{\Delta f}{f_z}$$

nel nostro caso quindi $\Delta W_G \approx \pm\ 0,01$ e si può avere un disturbo residuo in uscita dal GI

$$V_d \cdot \Delta W_G \approx 1\mu V$$

Possiamo confrontarlo con il rumore all'uscita del GI che è

$$\sqrt{\overline{n_G^2}} = \frac{\sqrt{S_v}}{\sqrt{2T_G}} \approx 4,5\mu V \qquad \text{con } T_G = 2,5\mu s$$

e vediamo che il disturbo residuo risulta inferiore al rumore e quindi è accettabile