PROBLEMA 1

Quadro dati e note

Segnale: impulso rettangolare, ampiezza V_P da misurare, durata $T_P = 50\ \mu s$

Rumore: bianco a banda larga. Limite di banda dato da un polo semplice con costante di tempo $T_h = 50ns$ (cioè un polo a frequenza $f_h \approx 3{,}2MHz$)

$\sqrt{S_{V,u}} = 50 nV / \sqrt{Hz}$ unilatera

f_s frequenza di campionamento da scegliere; $T_s = 1/f_s$ intervallo tra i campioni

(A) FILTRO OTTIMO

Con rumore bianco: la funzione peso ottima ha forma eguale al segnale

$$w_{op}(t) = \frac{1}{T_P} \quad \text{per } 0<t<T_P$$

In uscita:

segnale $s_y = V_P$ rumore $\sqrt{\overline{n_{y,op}^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_P}}$ rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{V_P}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{2T_P}$

ampiezza minima misurabile $V_{P\min,op} = \sqrt{\overline{n_{y,op}^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_P}} = 5\mu V$

Prima del filtraggio:

segnale $s_y = V_P$ rumore $\sqrt{\overline{n_x^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}}$ rapporto $\left(\frac{S}{N}\right)_{x} = \frac{V_P}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{4T_h}$

Dunque il filtro ottimo migliora il S/N del fattore

$$\sqrt{\frac{\overline{n_x^2}}{\overline{n_{y,op}^2}}} = \sqrt{\frac{T_P}{2T_h}} = \sqrt{500} \approx 22{,}4$$

Il filtraggio ottimo è realizzabile in pratica con un Gated Integrator GI.

(B) FILTRAGGIO DI CAMPIONI DISCRETI IN TEMPO

Suddividiamo T_P in N intervalli di tempo di durata T_s

$$N = \frac{T_P}{T_s}$$

Campioniamo al centro di ogni T_s e facciamo la somma dei campioni T_P in luogo della integrazione continua sul tempo T_P. Diamo peso 1/N a ogni campione per avere funzione peso normalizzata a 1 per la continua.

Con campioni di rumore incorrelati si ha in uscita segnale $s_y = V_P$ rumore $\sqrt{\overline{n_{y,s}^2}} = \dfrac{\sqrt{\overline{n_x^2}}}{\sqrt{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \dfrac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}}$ rapporto $\left(\dfrac{S}{N}\right)_s = V_P \dfrac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{N}$

ovvero mettendo in evidenza la frequenza di campionamento $f_s = 1/T_s$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = V_P \frac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{f_s T_P} = V_P \frac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{\frac{T_P}{T_s}}$$

Vediamo che il S/N migliora al crescere della frequenza di campionamento f_s e potremmo pensare di ottenere un risultato migliore di quello del filtraggio continuo usando f_s abbastanza elevata da avere

$$f_s T_P > \frac{T_P}{2T_h} \qquad \text{e cioè utilizzando} \qquad T_s < 2T_h$$

Questa deduzione è sbagliata, perchè in queste condizioni la formula utilizzata non è corretta in quanto non è più vero che i campioni di rumore sono incorrelati.

(C) <u>SCELTA DELLA FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO BASANDOSI SU APPROSSIMAZIONE TRIANGOLARE DELLA AUTOCORRELAZIONE DEL RUMORE</u>

Il rumore in uscita da un filtro si calcola utilizzando le funzioni di autocorrelazione del filtro $k_{ww}(\tau)$ e del rumore $R_{nn}(\tau)$

$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{ww}(\tau) R_{nn}(\tau) d\tau$$

La funzione peso del filtraggio con campionamento e somma di campioni è una sequenza di $\delta(\tau)$ con peso 1/N spaziate di T_s su tutto l'intervallo T_P. La sua autocorrelazione $k_{ww}(\tau)$ è una sequenza di $\delta(\tau)$ estesa su tutto l'intervallo $-T_P < \tau < T_P$ con spaziatura T_s e peso digradante linearmente da 1/N per la $\delta(\tau)$ centrale fino a 0 per le δ estreme.

L'autocorrelazione del rumore a larga banda limitato da un filtraggio con polo semplice a costante di tempo T_h = 50ns (cioè un polo a frequenza $f_h \approx$ 3,2MHz) ha forma eguale alla autocorrelazione di questo filtraggio passabasso. La approssimiamo con una autocorrelazione di forma triangolare $R_{nn,a}(\tau)$ avente i parametri principali eguali a quelli della autocorrelazione vera $R_{nn}(\tau)$:

- valore massimo = $\overline{n_x^2}$ rumore in ingresso
- larghezza a metà altezza $2T_n$ (T_n è detto tempo di autocorrelazione del rumore) tale che l'area della autocorrelazione eguaglia la densità spettrale (bilatera)

$$\overline{n_x^2} \cdot 2T_n = S_{V,b} = \frac{S_{V,u}}{2}$$

Ricordando che

$$\overline{n_x^2} = \frac{S_{V,u}}{4T_h}$$

vediamo che il tempo di autocorrelazione T_n è uguale alla costante di tempo del polo T_h

$$T_n = T_h$$

Con l'approssimazione a triangolo si considera che sia

$$R_{nn,a}\left(T_s\right)=0 \qquad \text{per } T_s \geq 2T_n = 2T_h$$

e si deduce quindi che la massima frequenza di campionamento per cui non si ha correlazione tra i campioni di rumore corrisponde al minimo intervallo di campionamento $T_{s,min}$

$$T_{s,\min} = 2T_n$$

utilizzando questo $T_{s,min}$ otteniamo

$$\overline{n_{y,ap}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{ww}\left(\tau\right) R_{nn,a}\left(\tau\right) d\tau = \overline{n_x^2} \cdot \frac{1}{N}$$

e cioè

$$\overline{n_{y,ap}^2} = \overline{n_x^2} \cdot \frac{2T_n}{T_P} = \frac{S_{V,u}}{2T_P} = \overline{n_{y,op}^2}$$

Dunque utilizzando $T_{s,\min} = 2T_n$ il rumore risulta eguale a quello del filtro ottimo. Anche il segnale in uscita è eguale e quindi otteniamo S/N eguale all'ottimo.

Si verifica facilmente che diminuendo ulteriormente l'intervallo di campionamento T_s il rumore rimane costante al livello qui valutato.

In conclusione, usando l'approssimazione triangolare si trova che per arrivare a un risultato equivalente al filtro ottimo è sufficiente alzare la frequenza di campionamento f_s fino al limite dato dal tempo di autocorrelazione

$$f_{s,\max} = \frac{1}{2T_n}$$

(D) <u>REVISIONE CRITICA DEL RISULTATO APPROSSIMATO TENENDO CONTO DELLA VERA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DEL RUMORE</u>

D1 – Valutazione qualitativa

La stima del rumore effettuata con approssimazione triangolare della funzione di autocorrelazione è chiaramente ottimistica. Infatti la funzione di autocorrelazione vera del rumore non si annulla per $\left|\tau\right| \geq 2T_n$, ma prosegue positiva. Pertanto nel calcolo del rumore si aggiungono altri termini positivi dovuti ad altre δ della $k_{ww}(\tau)$ oltre a quello della δ centrale

$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{ww}\left(\tau\right) R_{nn}\left(\tau\right) d\tau = \overline{n_x^2} \cdot \frac{1}{N} + \textit{altri contributi}$$

In particolare utilizzando la frequenza di campionamento vista $f_{s,\max} = 1/2T_n$ il rumore ottenuto è maggiore di quello ottenuto con il filtro ottimo e quindi il S/N è peggiore.

D2 – Valutazione quantitativa

Sappiamo che con limitazione di banda dovuta a un filtraggio passabasso con un polo semplice, la funzione di autocorrelazione del rumore è

$$R_{nn}\left(\tau\right) = \overline{n_x^2} \exp\left(-\left|\frac{\tau}{T_h}\right|\right) = \overline{n_x^2} \exp\left(-\left|\frac{\tau}{T_n}\right|\right)$$

Considerando significativi per il calcolo del rumore i valori di R_{nn} fino a 1/100 del massimo, la parte significativa di R_{nn} è contenuta nell'intervallo

$$|\tau| < 5T_n$$

e poichè

$$5T_n \ll T_P$$

con buona approssimazione il peso delle δ della k_{ww} contenute in questo intervallo può essere considerato costante ed eguale a quello 1/N della δ centrale.

Calcoliamo ora con la vera R_{nn} il rumore ottenuto con campionamento a frequenza $f_{s,\max} = 1/2T_n$, tenendo conto che le δ della k_{ww} sono a: τ=0 , $\tau = \pm 2T_n$ $\tau = \pm 4T_n$ $\tau = \pm 6T_n$ ....

$$\overline{n_y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{ww}(\tau) R_{nn}(\tau)\, d\tau = \overline{n_x^2} \cdot \frac{1}{N} + \overline{n_x^2} e^{-2} \cdot \frac{2}{N} + \overline{n_x^2} e^{-4} \cdot \frac{2}{N} + \overline{n_x^2} e^{-6} \cdot \frac{2}{N} .....$$

Pertanto risulta

$$\overline{n_y^2} = \frac{\overline{n_x^2}}{N}\left[1 + 2e^{-2} + 2e^{-4} + ...\right] = \frac{\overline{n_x^2}}{N}\left\{2\left[1 + e^{-2} + e^{-4} + ...\right] - 1\right\} =$$
$$= \frac{\overline{n_x^2}}{N}\left\{\frac{2}{1 - e^{-2}} - 1\right\} = \frac{\overline{n_x^2}}{N} \cdot \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

Si conclude che questo rumore risulta notevolmente maggiore di quello dato dal filtro ottimo

$$\overline{n_y^2} = 2{,}16 \cdot \frac{\overline{n_x^2}}{N} = 2{,}16 \cdot \overline{n_x^2} \cdot \frac{2T_n}{T_P} = 2{,}16 \cdot \frac{S_{V,u}}{2T_P} = 2{,}16 \cdot \overline{n_{y,op}^2}$$

Si può verificare che con il filtro a media di campioni si avvicina progressivamente il risultato del filtro ottimo aumentando la frequenza di campionamento, cioè diminuendo l'intervallo di campionamento T_s fino a renderlo piccolo rispetto a T_n. Il calcolo si può svolgere agevolmente procedendo in modo analogo a quanto sopra delineato.