PROBLEMA 2

Quadro dei dati

Forza F applicata

Primo caso: impulso a gradino

Secondo caso: impulso a rettangolo di durata T_p = 5ms

Sensore di forza piezoelettrico

A_q=10pC/N costante di conversione forza-carica

C_L= 500pF capacità totale del sensore e circuito collegato

Preamplificatore

resistenza di ingresso elevatissima > 500 MΩ , da considerare → ∞

f_{pa}=20MHz limite di banda

$\sqrt{S_{v,u}} = 20nV/\sqrt{Hz}$ a larga banda (unilatera)

$\sqrt{S_{i,u}} = 0,2\,pA/\sqrt{Hz}$ a larga banda (unilatera); dove specificato è da considerare anche una componente 1/f con f_c=1KHz

(A) Filtraggio ottimo

Il rumore non è bianco, pertanto: filtro ottimo = filtro sbiancante seguito da filtro adattato

Rumore di tensione in uscita dal preamplificatore

$$S_T = S_v + \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2} = S_v \frac{1+\omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$$

con $$T_{nc} = \frac{C_L \sqrt{S_v}}{\sqrt{S_i}} = 50\mu s$$

Filtro sbiancante = differenziatore CR con costante di tempo RC=T_{nc}

$$H_B = \frac{sT_{nc}}{1+sT_{nc}} \qquad \left|H_B(\omega)\right|^2 = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

Rumore sbiancato $S_B = S_v$

Caso 1: forza applicata a gradino

Una forza F a gradino applicata al sensore produce nel condensatore una carica piezoelettrica $Q = A_q F$ e quindi genera un segnale di tensione

$$V_F = \frac{A_q}{C_L} \cdot F \qquad \text{con} \qquad \frac{A_q}{C_L} = 20mV\,/\,Newton$$

Segnale “sbiancato” (in uscita dal filtro sbiancante)

$$v_{B1} = V_F \cdot 1(t) \cdot \exp(-t/T_{nc})$$

Il filtro adattato ha funzione peso di eguale forma

$$w_{m1} = \frac{1}{T_{nc}} \exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right)$$

Indicando con $S_{v,b}$ la densità bilatera del rumore sbiancato, il S/N è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{op1} = \frac{\int_0^\infty v_{B1}(t)\, w_{m1}(t)\, dt}{\sqrt{S_{v,b}}\sqrt{\int_0^\infty w_{m1}^2(t)\, dt}} = \frac{V_F T_{nc}}{\sqrt{S_{v,b}}} \sqrt{\int_0^\infty w_{m1}^2(t)\, dt} = \frac{V_F \sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{2 S_{v,b}}} = \frac{V_F \sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{S_{v,u}}}$$

L’ampiezza minima misurabile corrisponde a S/N=1 ed è

$$V_{F\,\min 1,op} = \frac{\sqrt{S_{vu}}}{\sqrt{T_{nc}}} \approx 2{,}8\mu V$$

corrispondente a

$$F_{\min 1,op} = \frac{V_{F\,\min 1,op}}{A_q / C_L} \approx 0{,}14 \cdot 10^{-3} N = 140 \mu N$$

<u>Caso 2: forza applicata a rettangolo di durata T_P</u>

Ovviamente il filtro sbiancante è lo stesso e così il rumore in uscita da esso.

Il segnale rettangolare è somma di un gradino positivo di ampiezza V_F a t=0 e di un gradino negativo di eguale ampiezza a t= T_P . Il segnale “sbiancato” quindi è composto da due impulsi esponenziali, uno positivo a t=0 e uno negativo a t= T_P .

$$v_{B2} = V_F \cdot \left\{ 1(t) \cdot \exp\left[-t/T_{nc}\right] - 1(t-T_P) \cdot \exp\left[-(t-T_P)/T_{nc}\right] \right\}$$

Dunque la funzione peso ottima in questo caso è

$$w_{m2} = 1(t) \cdot \frac{1}{T_{nc}} \exp\left[-t/T_{nc}\right] - 1(t-T_P) \cdot \frac{1}{T_{nc}} \exp\left[-(t-T_P)/T_{nc}\right]$$

Osservando che la sovrapposizione tra i due esponenziali è trascurabile perchè

$$T_P \gg T_{nc}$$

vediamo che nel caso 2 la misura si può considerare eseguita sottraendo dalla misura vista nel caso 1 effettuata sul primo esponenziale (positivo) la misura effettuata sul secondo esponenziale (negativo). Si nota che

1. l'ampiezza del segnale raddoppia
2. il rumore quadratico medio raddoppia
3. il S/N aumenta del fattore $\sqrt{2}$ e l'ampiezza minima diminuisce di questo fattore

Si arriva allo stesso risultato anche senza utilizzare la decomposizione in due misure, basta fare il calcolo del S/N utilizzando le corrette funzioni v_{B2} e w_{m2} e tener conto che $T_P \gg T_{nc}$.

(B) <u>Realizzazione approssimata del filtro adattato con un filtro passabasso a parametri costanti</u>

<u>Caso 1: forza applicata a gradino</u>

La funzione peso del filtro adattato mostra che esso è un filtro passabasso, quindi deve essere tale anche il filtro da usare in pratica per approssimarlo. Notiamo inoltre che il modulo della funzione peso in frequenza del filtro adattato è uguale a quello di un semplice filtro passabasso RC con $RC=T_{nc}$. Scegliendo di utilizzare questo filtro passabasso, il filtraggio del rumore bianco sarà eguale a quello ottenuto con il filtro adattato.

$$\overline{n_U^2} = S_{v,u}\frac{1}{4T_{nc}} \approx 1,4\mu V$$

Vediamo il risultato sul segnale (che sarà ovviamente meno favorevole).

Nel tempo $\quad v_{B1} = V_F \cdot 1(t)\cdot \exp(-t/T_{nc})$ $\qquad$ Laplace $\quad V_{B1} = V_F T_{nc}\dfrac{1}{1+sT_{nc}}$

L'azione del filtro passabasso è espressa da

risposta alla δ $\quad h_L = \dfrac{1}{T_{nc}}\exp\left(-\dfrac{t}{T_{nc}}\right)$ $\qquad$ Laplace $\quad H_L = \dfrac{1}{1+sT_{nc}}$

Quindi in uscita abbiamo

$v_{U1} = V_F \cdot 1(t)\cdot \dfrac{t}{T_{nc}}\exp(-t/T_{nc})$ $\qquad$ Laplace $\quad V_{F1} = V_F T_{nc}\dfrac{1}{(1+sT_{nc})^2}$

Come per tutti i filtri a parametri costanti, la misura viene effettuata misurando l'ampiezza massima del segnale di uscita. In questo caso il massimo si trova a $t=T_{nc}$ ed è

$$s_{U1} = \frac{V_F}{e} \approx 0,37\cdot V_F$$

Quindi risulta

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{L1} = \frac{V_F\sqrt{T_{nc}}}{\sqrt{S_{v,u}}}\cdot\frac{2}{e} = \frac{2}{e}\cdot\left(\frac{S}{N}\right)_{op1} \approx 0,74\left(\frac{S}{N}\right)_{op1} \approx \frac{1}{1,36}\left(\frac{S}{N}\right)_{op1}$$

$$V_{F\min 1,L} = \frac{e}{2}\frac{\sqrt{S_{vu}}}{\sqrt{T_{nc}}} \approx 3,8\mu V$$

<u>Caso 2: forza applicata a rettangolo di durata T_P</u>

Si applica anche in questo caso il ragionamento con il quale in (A) abbiamo visto che la misura sul segnale a rettangolo si ottiene sottraendo alla misura effettuata sul segnale a gradino a t=0 la misura effettuata sul segnale a gradino negativo a t= T_P .

Se ne conclude che passando da misura di segnale a gradino a misura di segnale a rettangolo anche utilizzando come filtro adattato approssimato un semplice filtro passabasso si migliora del fattore $\sqrt{2} \approx 1,41$ il S/N e l'ampiezza minima misurabile.

(C) <u>Misure in presenza di componente 1/f nel rumore di corrente</u>

Va ora tenuto conto nel rumore di corrente anche di una componente 1/f con frequenza d'angolo f_c

$$S_f = S_i\frac{f_c}{f}$$

All'uscita del filtro sbiancante essa produce una componente con spettro 1/f filtrato dalla capacità C_s e dal filtro sbiancante.

$$S_i\frac{\omega_c}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega^2 C_L^2}\cdot\frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2} = S_v\frac{\omega_c}{\omega}\cdot\frac{1}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

Si tratta dunque di un rumore 1/f filtrato solo da un passabasso (con polo con costante di tempo T_{nc}) e senza alcun filtraggio passalto.

<u>Caso 1: forza applicata a gradino</u>

Il filtro utilizzato come approssimazione del filtro adattato (vedere in B) è un passabasso con limite di banda f_{nc} (come il filtro adattato). Misurando l'impulso alla sua uscita non si ha alcun filtraggio passaalto che limiti il contributo $\sqrt{\overline{n_f^2}}$ del rumore 1/f, che risulterebbe quindi rilevante rispetto a quello $\overline{n_U^2}$ del rumore bianco

$$\overline{n_U^2} = S_{v,u}\frac{1}{4T_{nc}} \approx 1,4\mu V$$

Occorre aggiungere una qualche forma di filtraggio passaalto appositamente per limitare il contributo del rumore 1/f. Indichiamo con f_i il limite di banda inferiore di questo filtraggio e con f_s il limite di banda superiore (nel nostro caso dato dal polo con costante di tempo T_{nc}). Se $f_s >> f_i$ possiamo usare l'approssimazione a taglio netto della banda per valutare il rumore 1/f filtrato

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} = \sqrt{S_v}\sqrt{f_c} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 0,63\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)}$$

Il filtraggio più semplice utile allo scopo è l'azzeramento manuale della linea di base a inizio del ciclo di misure: se il ciclo ha durata T_m ~ 15 min si può contare di avere un taglio passalto con

$T_m \approx 1000s$ per cui si ha $\frac{f_s}{f_i} = \frac{T_m}{T_{nc}} = 2 \cdot 10^7$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,63\mu V \cdot 4,1 = 2,6\mu V$ quasi doppio del rumore bianco

Si può migliorare utilizzando un filtro passaalto a parametri costanti RC. Per evitare di ridurre sensibilmente il segnale occorre usare costante di tempo di differenziazione T_D lunga rispetto al segnale

$T_D = 100T_{nc} = 5ms$ per cui si ha $\frac{f_s}{f_i} = \frac{T_D}{T_{nc}} = 100$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,63\mu V \cdot 2,14 = 1,35\mu V$ circa eguale al rumore bianco

Questo risultato è già abbastanza soddisfacente. Per migliorare ancora si può utilizzare un Baseline Restorer BLR, che essendo un differenziatore commutato non modifica il segnale e permette di usare una costante di differenziazione T_B più breve

$T_B = 10T_{nc} = 500\mu s$ per cui si ha $\frac{f_s}{f_i} = \frac{T_B}{T_{nc}} = 10$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,63\mu V \cdot 1,41 = 0,9\mu V$ un pò minore del rumore bianco

Caso 2: forza applicata a rettangolo

La misura viene effettuata come differenza di due misure separate dall'intervallo di tempo T_P , quindi è una operazione di Correlated Double Sampling CDS, che al filtraggio passabasso con costante di tempo T_{nc} aggiunge un filtraggio passalto con limite inferiore di banda equivalente a un filtro passaalto a parametri costanti RC con costante di tempo di differenziazione T_P

$T_P = 5ms$ per cui si ha $\frac{f_s}{f_i} = \frac{T_P}{T_{nc}} = 100$

Questo filtraggio CDS causa anche un raddoppio del valore quadratico medio del rumore entro la banda definita da f_s e f_i . Senza introdurre alcun altro filtraggio il contributo di rumore *1/f* risulta

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx \sqrt{2} \cdot \sqrt{S_v}\sqrt{f_c} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} = \sqrt{2} \cdot 0,63\mu V \cdot 2,14 = 1,9\mu V$$

Va notato inoltre che nella misura sul segnale rettangolare anche il valore quadratico medio del rumore bianco entro la banda di filtraggio viene raddoppiato e risulta

$$\sqrt{\overline{n_{U2}^2}} \approx \sqrt{2}\sqrt{S_{v,u}}\,\frac{1}{\sqrt{4T_{nc}}}\cdot \approx 2\mu V$$

e quindi i due contributi di rumore bianco e di rumore 1/f risultano praticamente eguali.

Concludiamo che nella misura del segnale rettangolare non occorre introdurre un filtraggio passa-alto aggiuntivo perchè nel filtraggio determinato esaminando il caso con solo rumore bianco è intrinsecamente incluso un filtraggio passaalto che risulta adeguato per limitare il rumore 1/f.