PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Rumore: bianco a banda larga, con limite di banda dato da un polo semplice con costante di tempo T_n = 1000ns (cioè un polo a frequenza $f_h \approx$ 160kHz)

$\sqrt{S_{V,u}} = 100 nV / \sqrt{Hz}$ unilatera

Segnale: impulso triangolare simmetrico, larghezza alla base $2T_p$, ampiezza V_p da misurare

(A) Singolo Impulso con T_{p1} =25μs

Filtraggio con Gated Integrator sincronizzato sull'impulso. Funzione peso rettangolare con durata $T_{G1} = 2\ T_{p1}$ = 50μs e ampiezza $1/T_{G1}$, con GI normalizzato a guadagno unitario.

In uscita da GI:

segnale $$s_y = \frac{V_p T_{p1}}{T_{G1}} = \frac{V_p}{2}$$

rumore $$\sqrt{\overline{n_y^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_{G1}}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_{p1}}} = 10\mu V$$

segnale/rumore $$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{V_p}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{T_{p1}}$$

Ampiezza minima $$V_{p\min} = 2\sqrt{\overline{n_y^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{T_{p1}}} = 20\mu V$$

(B) Impulsi ripetitivi con T_{p1} =25μs e intervallo di ripetizione T_{r1}=500μs, cioè frequenza di ripetizione $f_{r1} = \frac{1}{T_{r1}} = 2kHz$

Filtraggio con boxcar integrator sincronizzato sugli impulsi, quindi con aperture di integrazione di durata $T_{G1} = 2\ T_{p1}$ = 50μs e costante di tempo $RC=T_F >> T_{G1}$ da scegliere.

B1) Scelta della costante di tempo $RC=T_F$

L'ampiezza V_p degli impulsi si può considerare si mantenga costante per tempi fino a 1 secondo ma non oltre. Dunque per tempi che precedono oltre 1s l'istante di acquisizione la funzione peso w_B del BI deve avere ampiezza trascurabile, meno di 1/100 del suo massimo. La w_B scende solo durante le aperture di durata T_{G1} e in 1s il numero di aperture è

$$N_1 = f_{r1} \cdot 1 = \frac{1}{T_{r1}} = 2000$$

Durante le aperture w_B scende esponenzialmente con costante di tempo T_F , dunque perchè w_B si riduca di un fattore 100 ad 1s prima dell'acquisizione occorre sia $N_1 T_{G1} \geq 4,6 T_F$ e quindi scegliamo

$$T_{F1} = \frac{N_1 T_{G1}}{5} = 20ms$$

B2) Valutazione di S/N e ampiezza minima

L'intervallo tra due impulsi T_{r1}=500μs è molto maggiore del tempo di autocorrelazione del rumore T_n = 1μs quindi il rumore è incorrelato tra le varie acquisizioni.

Il S/N ottenuto con il BI si può calcolare in modo abbastanza semplice come effetto combinato di due filtraggi in cascata:

1) acquisizione mediante GI con integrazione sull'intervallo T_{G1}

2) media esponenziale delle acquisizioni con rumore incorrelato tra le acquisizioni.

Indichiamo con *r* l'attenuazione del peso tra una acquisizione e la successiva

$$r_1 = \exp\left(-\frac{T_{G1}}{T_{F1}}\right) \approx 1 - \frac{T_{G1}}{T_{F1}} = 1 - 2,5 \cdot 10^{-3}$$

effettuando la media esponenziale di segnale e rumore si calcola facilmente che lo S/N migliora di un fattore

$$F_{A1} = \frac{1}{1-r_1} \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{1-r_1^2}} = \sqrt{\frac{1+r_1}{1-r_1}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r_1}} \approx \sqrt{2\frac{T_{F1}}{T_{G1}}} \approx 28,3$$

Quindi all'uscita del BI il S/N risulta dato dal prodotto del S/N ottenuto dal GI integrando sull'intervallo T_{G1} (vedere in A) per il fattore dato dalla media esponenziale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_z = \left(\frac{S}{N}\right)_y \cdot F_{A1} \approx \left(\frac{S}{N}\right)_y \sqrt{\frac{2T_{F1}}{T_{G1}}} = \frac{V_p}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{T_{p1}} \cdot \sqrt{\frac{2T_{F1}}{T_{G1}}} = \frac{V_p}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{T_{F1}}$$

L'ampiezza minima misurabile risulta ora

$$V_{p\min} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{T_{F1}}} = 0,7\mu V$$

(C) Impulsi ripetitivi con durata più breve e frequenza di ripetizione più elevata:

T_{p2} =250ns e intervallo di ripetizione T_{r2}=50μs, cioè frequenza di ripetizione $f_{r2} = \frac{1}{T_{r2}} = 20kHz$

Filtraggio con boxcar integrator sincronizzato sugli impulsi, quindi con integrazione di durata T_{G2} = 2 T_{p2} = 500ns e costante di tempo $RC=T_{F2}$ >> T_{G2} da scegliere tenendo conto dei cambiamenti.

C1) Scelta della costante di tempo $RC=T_F$

Le aperture ora hanno durata T_{G2} = 500ns e in 1s se ne verificano

$$N_2 = f_{r2} \cdot 1 = \frac{1}{T_{r2}} = 20000$$

quindi ragionando come in B scegliamo

$$T_{F2} = \frac{N_2 T_{G2}}{5} = 2ms$$

Pertanto la media esponenziale delle acquisizioni si effettua ora con attenuazione r_2

$$r_2 = \exp\left(-\frac{T_{G2}}{T_{F2}}\right) \approx 1 - \frac{T_{G2}}{T_{F2}} = 1 - 2,5 \cdot 10^{-4}$$

C2) Valutazione di S/N

Anche in questo caso è possibile e conveniente valutare il S/N dato dal BI come prodotto dei due filtraggi in cascata: il filtraggio GI di integrazione su T_{G2} e il filtraggio di media esponenziale con attenuazione r_2 che migliora S/N di un fattore F_{A2}

$$\left(\frac{S}{N}\right)_z = \left(\frac{S}{N}\right)_y \cdot F_{A2}$$

L'approccio risulta ancora conveniente in questo caso perchè il fattore dato dalla media esponenziale può essere ancora calcolato in modo semplice come visto in B, cioè considerando i campioni di rumore incorrelati. Infatti l'intervallo minimo tra campioni T_{r2}=50µs rimane molto maggiore del tempo di autocorrelazione del rumore (T_n = 1000ns). Il fattore di miglioramento portato dalla media esponenziale dunque risulta ora

$$F_{A2} = \frac{1}{1-r_2} \Big/ \sqrt{\frac{1}{1-r_2^2}} = \sqrt{\frac{1+r_2}{1-r_2}} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r_2}} \approx \sqrt{2\frac{T_{F2}}{T_{G2}}} \approx 89,4$$

L'effetto del GI sul rumore invece non può più essere calcolato come visto in A, cioè considerando il rumore bianco, ovvero considerando l'autocorrelazione una δ rispetto alla funzione peso del GI. Infatti il tempo di autocorrelazione del rumore (T_n = 1000ns) è maggiore della larghezza della funzione peso del GI (T_{G2} =500ns), perciò il rumore non si può considerare bianco e ci si aspetta un effetto modesto del GI sul rumore . Il rumore in uscita da GI si può calcolare utilizzando la vera autocorrelazione R_{nn} del rumore e la autocorrelazione k_{wwG} della funzione peso del filtro GI

L'autocorrelazione del rumore è esponenziale bilatera

$$R_{nn}(\tau) = \overline{n_x^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_n}\right) = \frac{S_{V,u}}{4T_n} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_n}\right)$$

La autocorrelazione della funzione peso del filtraggio GI è triangolare

$$k_{wwG}(\tau) = \frac{1}{T_G}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_G}\right) \qquad \text{per} \quad |\tau| < T_G \quad \text{e} \quad k_{ww}(\tau) = 0 \quad \text{per} \quad |\tau| > T_G$$

Il rumore all'uscita del GI si ottiene calcolando l'integrale

$$\overline{n_y^2}=\int_{-\infty}^{\infty}R_{nn}(\tau)\cdot k_{wwG}(\tau)\,d\tau=2\cdot\int_0^{T_G}\overline{n_x^2}\exp\left(-\frac{|\tau|}{T_n}\right)\cdot\frac{1}{T_G}\left(1-\frac{|\tau|}{T_G}\right)d\tau=2\cdot\frac{S_{V,u}}{4T_n}\cdot\frac{1}{T_G}\int_0^{T_G}\exp\left(-\frac{|\tau|}{T_n}\right)\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{T_G}\right)d\tau$$

Lo svolgimento di questo integrale non è difficile, ma comporta calcoli abbastanza laboriosi che richiedono un certo tempo: pertanto si richiede di impostare l'integrale come sopra indicato, ma non è richiesto di risolverlo. Il risultato è

$$\overline{n_y^2}=2\overline{n_x^2}\frac{T_n}{T_G}\left\{1-\frac{T_n}{T_G}+\frac{T_n}{T_G}e^{-\frac{T_G}{T_n}}\right\}=\frac{S_{V,u}}{2T_G}\left\{1-\frac{T_n}{T_G}\left(1-e^{-\frac{T_G}{T_n}}\right)\right\}$$

e si verifica che con i valori T_n=1000ns e T_{G2}=500ns l'effetto del filtraggio GI sul rumore è molto debole

$$\overline{n_y^2}=\overline{n_x^2}\cdot 0,852 \qquad \text{ovvero} \qquad \sqrt{\overline{n_y^2}}=0,92\cdot\sqrt{\overline{n_x^2}}$$

L'espressione sopra riportata è congruente con il risultato noto per il caso di rumore bianco

$$\overline{n_y^2}=\frac{S_{V,u}}{2T_G}$$

infatti si ritrova questo risultato aumentando la durata di integrazione T_G fino a $T_G >> T_n$.

(D) Impulsi ripetitivi con durata breve e frequenza di ripetizione ancora più elevata:

T_{p2} =250ns e intervallo di ripetizione T_{r3}=2,3μs, cioè frequenza di ripetizione $f_{r3}=\frac{1}{T_{r3}}\approx 430kHz$.

In questo caso si ha una correlazione significativa tra i campioni di rumore, dato che l'intervallo tra campioni T_{r3}=2,3μs ora è paragonabile al tempo di autocorrelzione del rumore T_n =1μs. Il calcolo dell'effetto della media esponenziale sul rumore risulta notevolmente meno semplice in quanto deve tener conto anche di termini di rumore correlato. In questo caso adottare lo schema di analisi del filtraggio come cascata dei due filtraggi è ancora possibile, ma non è conveniente.

La valutazione esatta del rumore all'uscita del BI può essere impostata utilizzando la funzione di autocorrelazione k_{wwB} del peso del filtraggio BI e l'autocorrelazione del rumore R_{nn} . La k_{wwB} agisce sul rumore di ingresso e tiene conto sia del filtraggio di integrazione nelle aperture di gate sia della media esponenziale delle acquisizioni

$$\overline{n_z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}R_{nn}(\tau)\cdot k_{wwB}(\tau)\,d\tau$$

L'autocorrelazione del rumore R_{nn} è esponenziale bilatera come già visto in C.

La autocorrelazione k_{wwB} del BI ha forma triangolare come la autocorrelazione k_{wwG} del GI vista in C, ma oltre al triangolo principale centrato su τ=0 presenta anche una serie di altri triangoli spaziati di T_{r3} , cioè centrati su $\tau = \pm T_{r3}$, $\tau = \pm 2T_{r3}$ $\tau = \pm 3T_{r3}$ ecc. Poichè il tempo di autocorrelazione del rumore T_n è paragonabile alla spaziatura T_{r3} , nel calcolo dell'integrale sopra indicato si trovano oltre al contributo principale dato dal triangolo centrale (il calcolo è simile a quello discusso in C) anche contributi significativi dovuti ai triangoli primi vicini (che centrati a $\tau = \pm T_{r3}$ fronteggiano una ampiezza di k_{wwB} circa 1/10 di quella massima) e in misura minore dovuti ai triangoli secondi vicini, (che centrati a $\tau = \pm 2T_{r3}$ fronteggiano una ampiezza di k_{wwB} circa 1/100 di quella massima). Rispetto al caso in cui l'intervallo di ripetizione sia abbastanza lungo da evitare correlazione tra le acquisizioni (come nel caso visto in B) la situazione è peggiore: i termini aggiuntivi sono positivi e aumentano il rumore in uscita e diminuiscono il S/N ottenuto (infatti sia l'autocorrelazione del rumore R_{nn} che quella della funzione peso k_{wwB} qui sono sempre positive). In conclusione, non è conveniente aumentare la frequenza di ripetizione oltre al limite in cui si inizia ad avere correlazione significativa tra le acquisizioni.