PROBLEMA 2

Quadro dei dati

Sensori capacitivi piani:

ε_o = 8,85 pF/m — costante dielettrica (aria)

A= 4 cm^2 — area degli elettrodi

l = 0,4 mm — distanza tra gli elettrodi a riposo

quindi $C_o = \varepsilon_o \dfrac{A}{\ell} = 8{,}85\, pF$

20 mV — max tensione applicabile al condensatore

Preamplificatore differenziale

Alta resistenza di ingresso $\rightarrow \infty$

Larga banda > 10MHz

$\sqrt{S_V}$ = 50nV $Hz^{-1/2}$ — densita' efficace di rumore di tensione (unilatera)

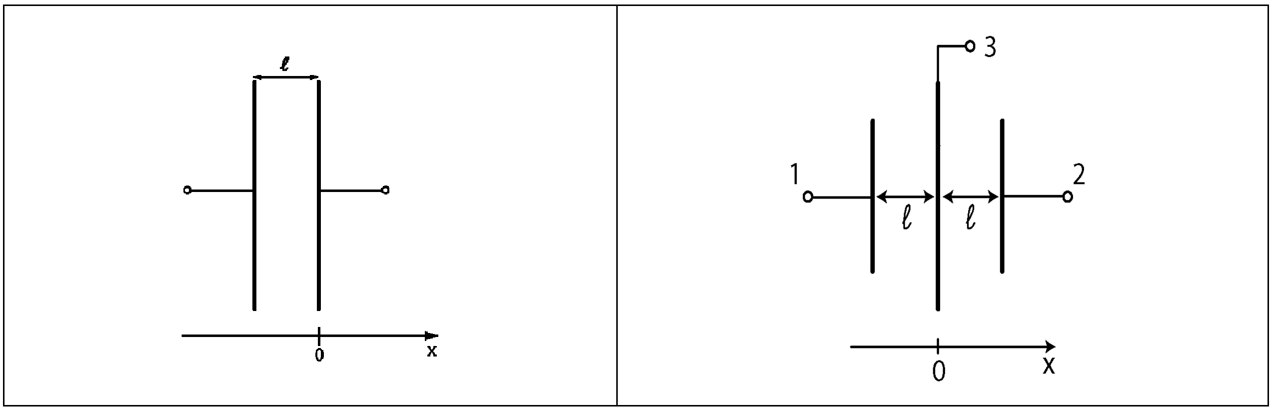
$\sqrt{S_i}$ = 0,1pA $Hz^{-1/2}$ — densita' efficace di rumore di corrente (unilatera)

$f_c \approx$ 10kHz — corner-frequency delle componenti 1/f del rumore

Occorre misurare:

- traslazioni x statiche con valore costante per intervalli di tempo fino a 10s
- traslazioni x sinusoidali oscillanti a frequenza f_o con ampiezza di oscillazione costante per intervalli di tempo fino a 10s. La frequenza f_o varia lentamente e casualmente nell'intervallo tra 40 e 100Hz, ma è disponibile un segnale ausiliario sinusoidale con frequenza e fase uguali all'oscillazione di x.

(A) Confronto tra sensore semplice e sensore differenziale

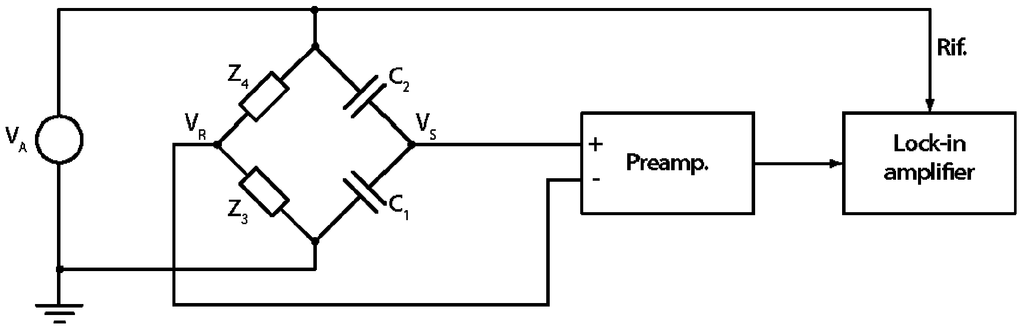


Il principio di funzionamento è che il reciproco della capacità 1/C varia linearmente con x:

a riposo con x=0 $\frac{1}{C} = \varepsilon_o \frac{\ell}{A}$ con spostamento x $\frac{1}{C} = \varepsilon_o \frac{\ell + x}{A}$

A1 Configurazione circuitale

Per misurare le variazioni di 1/C (ovvero dell'impedenza) si può utilizzare una configurazione a ponte di Wheatstone



Nel caso di sensore semplice la capacità variabile C_1 fa partizione con un condensatore costante $C_2 = C_0$.

Nel caso di sensore differenziale C_1 e C_2 sono le due capacità variabili (C_1 tra gli elettrodi 1 e 3 e C_2 tra gli elettrodi 2 e 3).

Il ramo di riferimento ha due impedenze fisse eguali Z_3 e Z_4 (p.es. resistenze $R_3 = R_4$ o condensatori C_3=C_4=C_0) che forniscono la tensione di riferimento $V_R = \frac{V_A}{2}$

A2 Trasduzione con sensore semplice

La tensione sul nodo di destra del ponte a seguito dello spostamento x è

$$V_S = V_A \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = V_A \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = V_A \frac{\ell + x}{\ell + x + \ell} = \frac{V_A}{2} \frac{1 + \frac{x}{\ell}}{1 + \frac{x}{2\ell}}$$

posto $\delta = \frac{x}{\ell} < 1$ si ha $V_S = \frac{V_A}{2} \frac{1+\delta}{1 + \frac{\delta}{2}}$ si nota che la trasduzione non è lineare

Limitando la dinamica di misura a $\delta \le \frac{1}{100}$

la trasduzione è con buona approssimazione lineare

$$V_S \approx \frac{V_A}{2}(1+\delta)\left(1-\frac{\delta}{2}\right) = \frac{V_A}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}-\frac{\delta^2}{2}\right) \approx \frac{V_A}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$$

e si ottiene un segnale di uscita differenziuale dal ponte

$$V_U = V_S - V_R \approx \frac{V_A}{4}\delta = \frac{V_A}{4}\frac{x}{\ell}$$

Usando V_A = 40mV (cioè con tensione sul sensore massima consentita 20mV) la costante di conversione da spostamento a tensione è

$$G_S = \frac{V_U}{x} \cong \frac{V_A}{4\ell} = 25\frac{\mu V}{\mu m}$$

con dinamica di misura

$$|x| \leq \frac{\ell}{100} = 4\mu m$$

A3 Trasduzione con sensore differenziale

A seguito dello spostamento x si ha $\frac{1}{C_1} = \frac{\ell + x}{\varepsilon_o A}$ e $\frac{1}{C_2} = \frac{\ell - x}{\varepsilon_o A}$

La tensione sul nodo di destra del ponte a seguito dello spostamento x è

$$V_S = V_A \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = V_A \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = V_A \frac{\ell + x}{\ell + x + \ell - x} = \frac{V_A}{2}\left(1+\frac{x}{\ell}\right) = \frac{V_A}{2}(1+\delta)$$

Si nota che la trasduzione è lineare su tutta la dinamica $\delta < 1$ senza approssimazione o limitazione.
Si ottiene un segnale di uscita differenziuale dal ponte

$$V_U = V_S - V_R = \frac{V_A}{2}\delta = \frac{V_A}{2}\frac{x}{\ell}$$

Usando V_A = 40mV (cioè tensione sul sensore massima consentita 20mV) si ha costante di conversione da spostamento a tensione

$$G_D = \frac{V_U}{x} = \frac{V_A}{2\ell} = 50\frac{\mu V}{\mu m}$$

con dinamica di misura

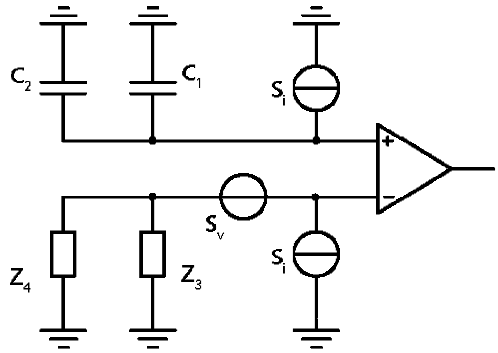
$$|x| < \ell = 400\mu m$$

Si conclude che il sensore differenziale è vantaggioso in quanto offre

- dinamica di misura di x molto più ampia
- segnale di uscita maggiore a parità di x, quindi migliore spostamento minimo misurabile

(B) <u>Misura di spostamenti statici</u>

Il segnale di uscita dal ponte V_U si confronta con il rumore all'ingresso del preamplificatore differenziale. La frequenza f_a della tensione sinusoidale di alimentazione del ponte V_A va scelta in modo da portare il segnale in una zona spettrale dove il rumore è meno forte. Il circuito equivalente per valutare il rumore all'ingresso è



Utilizzando basse impedenze Z_1 e Z_2 (tipicamente due piccole resistenze eguali) il contributo del generatore di corrente S_i all'ingresso ad esse collegato risulta trascurabile rispetto agli altri e lo spettro di rumore di tensione all'ingresso del preamplificatore è

$$S_n = S_V + S_i \left|Z_S\right|^2 = S_V + S_i \frac{1}{(2\pi f)^2 (C_1 + C_2)^2} \approx S_V + S_i \frac{1}{(2\pi f)^2 (2C_o)^2}$$

Consideriamo per ora solo le componenti bianche di S_i e S_V . Il contributo di S_i è prevalente a bassa frequenza, ma decresce al crescere della frequenza e si riduce eguale a quello di S_V a

$$f_{nc} = \frac{1}{4\pi C_o} \frac{\sqrt{S_i}}{\sqrt{S_V}} \approx 18kHz$$

Scegliendo $f_a > 5f_{nc}$ il segnale viene portato a una frequenza f_a alla quale il contributo di S_i risulta trascurabile rispetto a S_V. Scegliamo

$$f_a = 100kHz$$

Considerando anche le componenti di rumore *1/f* questa scelta di f_a si conferma appropriata, perchè le componenti *1/f* hanno frequenza d'angolo molto più bassa $f_c \approx 10kHz << f_a$ e pertanto alla frequenza f_a sono molto inferiori alle componenti bianche.

Dunque dal ponte abbiamo un segnale sinusoidale a frequenza $f_a = 100kHz$ a banda stretta $\Delta f_U \approx 0{,}1Hz$ (circa reciproco dell'intervallo di tempo a cui si possono osservare variazioni dell'ampiezza) e il rumore nella banda del segnale è

$$S_n\left(f_a\right) \approx S_V$$

Effettuiamo il filtraggio a banda stretta utilizzando un lock-in-amplifier (LIA). Come riferimento usiamo la tensione di alimentazione del ponte di Wheatstone e regoliamo il filtro passabasso interno del LIA in modo che l'uscita segua bene le variazioni dello spostamento nel tempo, cioè in modo che la sua frequenza di taglio passabasso f_L stabilisca una banda passante di filtraggio $\Delta f_L = 2 f_L$ un pò più larga di quella del segnale

$$\Delta f_L \approx 2 f_L \approx 10 \Delta f_U \approx 1Hz$$

All'uscita del LIA contribuiscono solo le componenti di ingresso che hanno frequenza e fase eguale al riferimento. In termini dei valori all'uscita del ponte si ottiene

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{V_U}{\sqrt{2S_{n,u}\left(f_a\right) f_L}}$$

il minimo segnale misurabile è

$$V_{U\min} = \sqrt{2S_{n,u}\left(f_a\right) f_L} \approx \sqrt{2S_V f_L} \approx 70\text{nV}$$

il corrispondente spostamento minimo misurabile risulta

$$x_{\min} = \frac{V_{U\min}}{G_D} = 1,4\ nm$$

(C) <u>Misura di spostamenti oscillatorii</u>

Rimangono valide le considerazioni fatte in B riguardo al rumore e la conseguente scelta della frequenza di alimentazione del ponte f_a.
Lo spostamento oscillante è descritto nel dominio di Fourier da un segnale con una riga spettrale a f_o . Quindi la modulazione dovuta alla alimentazione alternata del ponte a frequenza f_a sposta in frequenza il segnale, che risulta ora composto di due righe spettrali alle frequenze

$$f_a \pm f_o$$

Possiamo ancora impiegare il LIA che utilizza come riferimento l'alimentazione del ponte alla frequenza f_a. Il moltiplicatore del LIA sposta in frequenza queste righe, portandole rispettivamente in giù a $\pm f_o$ ed in su a $2f_a \pm f_o$.

Anzitutto occorre cambiare la regolazione del filtro passabasso del LIA perchè con $f_L \approx 0{,}5$ Hz l'oscillazione a frequenza f_o arriverebbe molto attenuata all'uscita del LIA. Occorre avere almeno $f_L > 10 f_o$ e quindi adottiamo

$$f_{Lo} = 10kHz$$

Il rumore in uscita dal LIA aumenta però di un fattore $\sqrt{f_{Lo}/f_L} \approx 100$, degradando il S/N e aumentando di questo fattore il segnale minimo misurabile. Inoltre all'uscita del LIA dovremo misurare l'ampiezza di un segnale sinusoidale e non più un segnale in continua come in B.

Per evitare questa degradazione del S/N, occorre filtrare ulteriormente l'uscita del LIA. Il segnale da misurare è sinusoidale a banda stretta $\Delta f_U \approx 0{,}1Hz$ (circa reciproco dell'intervallo di tempo a cui si possono osservare variazioni dell'ampiezza), pertanto è utile filtrare a banda stretta centrata sulla frequenza del segnale f_o. Questa frequenza però varia erraticamente nel tempo e quindi un filtro risonante (filtro passabanda a parametri costanti) non risulta adatto. È opportuno invece utilizzare un secondo Lock-in-amplifier, che chiamiamo LIA2. Diamo a LIA2 come ingresso l'uscita di LIA1 e come segnale di riferimento il segnale ausiliario che ha frequenza e fase eguali a quelli dello spostamento oscillatorio da misurare.
Osserviamo passo passo gli spostamenti in frequenza prodotti dalla alimentazione del ponte a frequenza f_a e dalla demodulazione effettuata dal LIA1 con riferimento a frequenza f_a. Si nota che:

a) la porzione di spettro di rumore bianco S_V centrata sulla frequenza f_a all'ingresso di LIA1, viene portata all'uscita di LIA1 in bassa frequenza, centrata su $f=0$ e contenuta nella banda f_{Lo} definita dal filtro passabasso di LIA1

b) per l'effetto di "spectrum folding", questa densità spettrale all'uscita di LIA1 risulta raddoppiata $2S_V$.

c) il segnale viene riportato alla frequenza $\pm f_o$ con la sua ampiezza corretta

Pertanto LIA2 riceve in ingresso

- il segnale oscillante a frequenza f_o con ampiezza V_U
- uno spettro di rumore bianco con densità $2S_V$ limitato in banda fino a f_{Lo}

Per misurare l'ampiezza del segnale oscillante possiamo utilizzare nel LIA2 il filtro passabasso con taglio $f_L \approx 0,5 Hz$ come discusso in B e otteniamo

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{V_U}{\sqrt{4 S_V f_L}}$$

La minima ampiezza misurabile è quindi

$$V_{U\min} = \sqrt{4 S_V f_L} \approx 100\, nV$$

e la corrispondente ampiezza minima misurabile di spostamento oscillante risulta

$$x_{\min} = \frac{V_{U\min}}{G_D} = 2\ nm$$