PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Forza F applicata

quasi-gradino con tempo di salita finito T_a , cioè sale a rampa lineare con durata T_a da zero fino al valore F_a e poi rimane costante

$T_a = 2{,}5ms$

Sensore di forza piezoelettrico

A_q=12pC/N costante di conversione forza-carica

C_L= 600pF capacità totale del sensore e circuito collegato

Preamplificatore

resistenza di ingresso elevatissima > 500 MΩ , da considerare → ∞

f_{pa}=20MHz limite di banda

$\sqrt{S_v} = 40nV/\sqrt{Hz}$ a larga banda (unilatera)

$\sqrt{S_i} = 0{,}1pA/\sqrt{Hz}$ a larga banda (unilatera); dove specificato è da considerare anche una componente 1/f con f_c=160Hz

(A) Filtraggio ottimo

Il rumore non è bianco, pertanto: filtro ottimo = filtro sbiancante seguito da filtro adattato

A1 - Filtro sbiancante

Rumore di tensione in uscita dal preamplificatore

$$S_T = S_v + \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2} = S_v \frac{1+\omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$$

con $$\boxed{T_{nc} = \frac{C_L\sqrt{S_v}}{\sqrt{S_i}} = 240\mu s}$$

Filtro sbiancante = differenziatore CR con costante di tempo RC=T_{nc}

$$H_B = \frac{sT_{nc}}{1+sT_{nc}} \qquad \left|H_B(\omega)\right|^2 = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

Rumore sbiancato $S_B = S_v$

Forza F applicata al sensore

$F = F_a \frac{t}{T_a}[1(t) - 1(t - T_a)]$ per 0<t<T_a e $F = F_a$ per t>T_a

produce nel condensatore una carica piezoelettrica Q = A_q F e quindi genera un segnale di tensione

$v_F = \frac{A_q}{C_L} \cdot F$ con $\boxed{\frac{A_q}{C_L} = 20mV / Newton}$

cioè nel tempo

$$v_F = \frac{A_q F_a}{C_L} \frac{t}{T_a}[1(t) - 1(t - T_a)] = V_{Fa} \frac{t}{T_a}[1(t) - 1(t - T_a)] \qquad \text{per } 0<t<T_a$$

$$v_F = V_{Fa} = \frac{A_q}{C_L} F_a \qquad \text{per } t>T_a$$

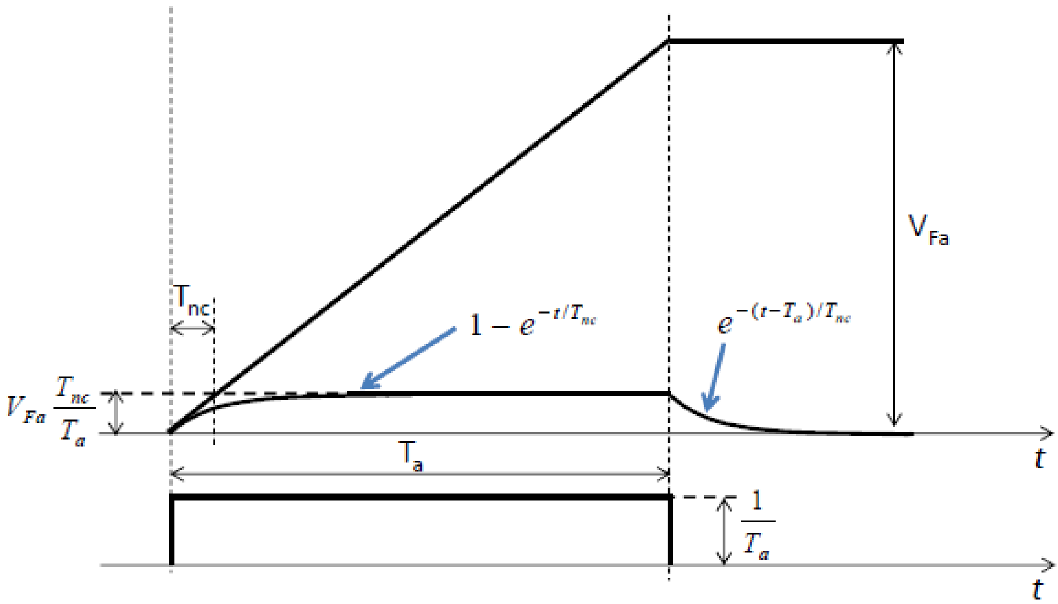
e in trasformata di Laplace

$$V_F = \frac{V_{Fa}}{T_a} \frac{1}{s^2}\left[1 - \exp(-sT_a)\right]$$

Ricaviamo il segnale in uscita dal filtro sbiancante (che per semplicità chiamiamo“segnale sbiancato”) analizzando l’effetto in trasformata o direttamente nel tempo

$$V_B = V_F \cdot H_B = V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a} \cdot \frac{1}{1 + sT_{nc}} \cdot \frac{1}{s}\left[1 - \exp(-sT_a)\right]$$

$$v_B = v_F * h_B = V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a}\left[1(t)\left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right) - 1(t - T_a)\left(1 - e^{-(t - T_s)/T_{nc}}\right)\right]$$



La trasformata mette in evidenza che la forma del segnale è quella di un rettangolo con durata T_a filtrato da un passabasso a 1 polo con costante di tempo T_{nc} e quindi (riferita a un segnale di ampiezza unitaria) questa forma è descritta

per $0 < t < T_a$ da $1 - e^{-t/T_{nc}}$

per $t > T_a$ da $1 - e^{-t/T_{nc}} - \left(1 - e^{-(t-T_a)/T_{nc}}\right) = e^{-(t-T_a)/T_{nc}} - e^{-t/T_{nc}}$

Dato che $T_a >> T_{nc}$, si nota che il transitorio iniziale di salita esponenziale si può considerare terminato ben prima di $t=T_a$ (termine del rettangolo) e quindi con ottima approssimazione si può considerare la forma descritta

per $t > T_a$ da $e^{-(t-T_a)/T_{nc}}$

A2 - Filtro adattato

Il segnale sbiancato è

$$v_b = V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a}\left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right) \qquad \text{per } 0 < t < T_a$$

$$v_b = V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a} e^{-(t-T_a)/T_{nc}} \qquad \text{per } t > T_a$$

Pertanto la funzione peso normalizzata del filtro adattato è

$$w_m = \frac{1}{T_a}\left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right) \qquad \text{per } 0 < t < T_a$$

$$w_m = \frac{1}{T_a} e^{-(t-T_a)/T_{nc}} \qquad \text{per } t > T_a$$

Il rumore sbiancato ha densità unilatera S_v , corrispondente a densità bilatera $S_{v,b} = S_v /2$.

Il segnale in uscita dal filtro adattato è

$$V_{u,op} = \int_0^\infty v_B(t)\, w_m(t)\, dt = \frac{V_{Fa} T_{nc}}{T_a^2}\left[\int_0^{T_a}\left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right)^2 dt + \int_{T_a}^\infty e^{-2(t-T_a)/T_{nc}} dt + \right]$$

Per brevità indichiamo con I_o l'integrale entro la parentesi e calcoliamolo a parte (lo ritroveremo in altri calcoli)

$$I_o = \int_0^{T_a}\left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right)^2 dt + \int_{T_a}^\infty e^{-2(t-T_a)/T_{nc}} dt = \int_0^{T_a}\left(1 - 2e^{-t/T_{nc}} + e^{-2t/T_{nc}}\right) dt + \int_{T_a}^\infty e^{-2(t-T_a)/T_{nc}} dt =$$

$$= \left(T_a - 2T_{nc} + \frac{T_{nc}}{2} + \frac{T_{nc}}{2}\right) = T_a - T_{nc}$$

Ricaviamo quindi

$$V_{u,op} = \frac{V_{Fa} T_{nc}}{T_a^2}\left(T_a - T_{nc}\right)$$

Il rumore in uscita dal filtro adattato è

$$\sqrt{\overline{v_{u,op}^2}} = \sqrt{S_{v,b}}\sqrt{\int_0^\infty w_m^2\left(t\right)dt} = \sqrt{\frac{S_v}{2}}\frac{1}{T_a}\sqrt{I_o} = \sqrt{\frac{S_v}{2}}\frac{1}{T_a}\sqrt{T_a - T_{nc}} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_a}}\sqrt{1-\frac{T_{nc}}{T_a}} = 0{,}537\ \mu\text{V}$$

Dunque il S/N è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{V_{u,op}}{\sqrt{\overline{v_{u,op}^2}}} = \frac{V_{Fa}}{\sqrt{\frac{S_v}{2}}}\frac{T_{nc}}{T_a}\sqrt{T_a - T_{nc}} = \frac{V_{Fa}}{\sqrt{\overline{v_{i,op}^2}}}$$

dove $\overline{v_{i,op}^2}$ è il rumore di tensione in uscita <u>riportato all'ingresso per confrontarlo con il segnale di tensione del sensore</u>

$$\sqrt{\overline{v_{i,op}^2}} = \sqrt{\frac{S_v}{2}}\frac{T_a}{T_{nc}}\frac{1}{\sqrt{T_a - T_{nc}}} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_a}}\frac{T_a}{T_{nc}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{T_{nc}}{T_a}}} = 4{,}4\ \mu V$$

Il segnale del sensore minimo misurabile (per il quale si ha S/N=1) è

$$V_{F\min,op} = \sqrt{\overline{v_{i,op}^2}} = 4{,}4\ \mu V$$

e la corrispondente forza minima misurabile risulta

$$F_{a\min,op}\frac{V_{F\min,op}}{A_q} \approx 220 \mu N$$

(B) <u>Filtraggio che approssima in pratica il filtro ottimo</u>

La funzione peso ottima w_m del filtro adattato ha forma quasi rettangolare (rettangolo di durata T_a filtrato da un semplice passabasso con costante di tempo $T_{nc} << T_a$). Intuitivamente pare una buona approssimazione utilizzare in luogo del filtro adattato un gated integrator (GI), che ha funzione peso w_g rettangolare, abbastanza somigliante al peso ottimo. Per il GI occorre scegliere durata e posizionamento del gate. Valutiamo anzitutto la soluzione più semplice, con il gate che inizia all'inizio della rampa e termina al termine della rampa (come illustrato nella figura a pag.2). Se lo scarto in peggioramento rispetto all'ottimo risulterà minore del 10% considereremo accettabile questa soluzione, altrimenti cercheremo di migliorare cambiando posizione e/o durata del gate e cercando di ottimizzare la scelta.

La funzione peso del GI è

$$w_g = \frac{1}{T_a}\left[1\left(t\right) - 1\left(t - T_a\right)\right]$$

Il segnale in uscita risulta uguale a quello del filtro ottimo

$$V_{u,g} = \int_0^\infty v_B(t)\, w_g(t)\, dt = V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a^2} \int_0^{T_a} \left(1 - e^{-t/T_{nc}}\right) dt \approx V_{Fa} \frac{T_{nc}}{T_a^2}\left(T_a - T_{nc}\right)$$

Il rumore in uscita è

$$\sqrt{\overline{v_{u,g}^2}} = \sqrt{S_{v,b}} \sqrt{\int_0^\infty w_g^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_a}} \approx 0{,}56\ \mu\text{V}$$

e risulta poco maggiore di quello del filtro ottimo

$$\sqrt{\overline{v_{u,g}^2}} = \sqrt{\overline{v_{u,op}^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T_{nc}}{T_a}}} \approx 1{,}05 \cdot \sqrt{\overline{v_{u,op}^2}} \quad = 1{,}05$$

Il risultato è solo del 5% peggiore di quello del filtro ottimo e la soluzione è accettabile senza che occorra ottimizzare la regolazione del GI.

Possiamo verificare che il S/N ottenibile è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_g = \frac{V_{u,g}}{\sqrt{\overline{v_{u,g}^2}}} = \frac{V_{Fa}}{\sqrt{\frac{S_v}{2T_a}}} \frac{T_{nc}}{T_a^2}\left(T_a - T_{nc}\right) = \frac{V_{Fa}}{\sqrt{\overline{v_{i,g}^2}}}$$

il minimo segnale del sensore misurabile è

$$V_{F\min,g} = \sqrt{\overline{v_{i,g}^2}} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_a} \frac{T_a}{T_{nc}} \frac{1}{1 - \frac{T_{nc}}{T_a}}} = 4{,}6\ \mu V$$

la minima forza misurabile è

$$F_{a\min,g} \frac{V_{F\min,g}}{A_q} \approx 230 \mu N$$

(C) Misure in presenza di componente 1/f nel rumore di corrente

Teniamo ora conto nel rumore di corrente anche di una componente 1/f con frequenza d'angolo f_c=160 Hz

$$S_f = S_i \frac{f_c}{f}$$

All'uscita del filtro sbiancante essa produce una componente di rumore di tensione con spettro 1/f filtrato dalla capacità C_L e dal filtro sbiancante

$$S_i \frac{f_c}{f} \cdot \frac{1}{(2\pi f)^2 C_L^2} \cdot \frac{(2\pi f)^2 T_{nc}^2}{1+(2\pi f)^2 T_{nc}^2} = S_v \frac{f_c}{f} \cdot \frac{1}{1+(2\pi f)^2 T_{nc}^2}$$

cioè con spettro 1/f caratterizzato quantitativamente da

$$\boxed{\sqrt{S_v f_c} \approx 0,5\mu V}$$

e filtrato da un passabasso con polo semplice a costante di tempo T_{nc} , limite di banda $f_{nc} = 1/2\pi\, T_{nc} \approx 660$ Hz. Il GI utilizzato (vedere in B) effettua un ulteriore filtraggio passabasso con limite di banda

$$f_s \approx 1/2T_a = 200\ Hz$$

L'uscita del GI non ha subito alcun filtraggio passa-alto che limiti il contributo $\sqrt{\overline{n_f^2}}$ del rumore 1/f, che quindi risulterà rilevante rispetto a quello del rumore bianco

$$\sqrt{\overline{v_{u,g}^2}} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_a}} \approx 0,56\mu V$$

Per limitare il contributo del rumore 1/f occorre aggiungere appositamente un filtraggio passa-alto. Indichiamo con f_i il limite di banda inferiore di questo filtraggio e con f_s il limite di banda superiore, nel nostro caso dato dal GI.

Possiamo valutare il valore efficace di rumore 1/f in uscita utilizzando l'approssimazione a taglio netto della banda.

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} = \sqrt{S_v}\sqrt{f_c} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 1,8\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)}$$

L'approssimazione è buona se $f_s >> f_i$. Se il taglio inferiore f_i si avvicina a quello superiore f_s l'approssimazione diviene via via più grezza, ma dà ancora una indicazione quantitativa del risultato. Valutiamo i risultati ottenibili con alcuni semplici schemi che realizzano in modo semplice il filtraggio passalto.

C1- Azzeramento manuale della linea di base a inizio ciclo di misure

Se le basse frequenze sono filtrate solo da un azzeramento manuale della linea di base a inizio di un ciclo di misure con durata T_m di varii minuti il taglio passalto è a frequenza molto bassa; evitata che il valor efficace del rumore 1/f diverga, ma il rumore 1/f rimane comunque nettamente maggiore del rumore bianco

$f_i \approx 1/T_m \approx 10^{-3} Hz$ per cui si ha $\sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 3,5$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,5\mu V \cdot 3,5 = 1,75\mu V$

C2- Filtro passalto CR a parametri costanti

Si può cercare di migliorare **inserendo prima del GI** un filtro passa-alto a parametri costanti CR. Questo filtro differenziatore però riduce l'ampiezza del segnale che arriva al GI. Perchè la riduzione sia inferiore al 2% (due per cento) occorre che la costante di tempo di differenziazione T_D sia lunga rispetto alla durata T_a del segnale sbiancato

$T_D \geq 50T_a = 125ms$

per cui si ha $f_i = 1/2\pi T_D \leq 1,27Hz$ → $\frac{f_s}{f_i} = 157$ → $\sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 2,25$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,5\mu V \cdot 2,25 = 1,12\mu V$ ancora nettamente maggiore del rumore bianco

C3- Filtraggio passalto mediante sottrazione di filtraggio correlato

Si può utilizzare il GI eseguendo dapprima una integrazione della linea di base per il tempo T_a prima dell'inizio del segnale e sottraendo poi questa misura da quella successivamente effettuata integrando il segnale. In questo modo al filtraggio passabasso dato dal GI la sottrazione aggiunge un filtraggio passa-alto simile a un Correlated-Double-Sampling (CDS), quindi con frequenza di taglio regolata dal ritardo T_R tra la prima acquisizione (inizio della integrazione di linea di base) e la seconda (inizio della integrazione del segnale). Naturalmente il ritardo T_R deve essere più lungo della durata T_a del GI, perchè il segnale non deve esser incluso nella acquisizione della linea di base. Consideriamo di esserein grado di utilizzare

$T_R = T_a = 2,5ms$

per cui si ha $f_i = 1/2\pi T_R = 63Hz$ → $\frac{f_s}{f_i} = \frac{2\pi T_R}{2T_a} = \pi$ → $\sqrt{\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)} \approx 1,07$

e quindi $\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 0,5\mu V \cdot 1,07 = 0,54\mu V$ circa eguale al rumore bianco