PROBLEMA 2

Quadro dei dati

$v_s = A_s \cos\omega_s t$ segnale

A_s ampiezza da misurare, lentamente variabile su tempi ≥ 1s

$f_s = 2kHz$ frequenza del segnale (frequenza angolare $\omega_s = 2\pi f_s$)

$v_R = B\cos\omega_s t$ segnale di riferimento sincrono con il segnale da misurare

$f_o = f_s = 2kHz$ frequenza di risonanza del filtro accordato

$Q=10$ fattore di qualità del filtro accordato a

$\sqrt{S_v} = 100nV/\sqrt{Hz}$ densità di rumore a larga banda (unilatera)

$f_c = 1\ kHz$ frequenza d'angolo del rumore $1/f$

(A) Filtraggio con filtro risonante RLC

A1 - Parametri caratteristici, risposta e funzione peso del filtro risonante

Il filtro risonante *RLC* è un filtro lineare a parametri costanti. Si può valutare quantitativamente la sua azione e il suo effetto tenendo conto dei suoi parametri caratteristici

- **Frequenza di risonanza** $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- **Smorzamento** della risposta nel tempo $\alpha_o = \dfrac{1}{2RC}$
- Fattore di **qualità** $Q = \dfrac{\omega_o}{2\alpha_o}$
- Guadagno unitario alla frequenza di risonanza f_o del blocco di filtraggio $H(f_o)=1$ (il filtro è inserito in un apposito circuito di amplificazione)

NB: sono dati i valori di ω_o e Q e quindi anche il valore di $\alpha_o = \omega_o / 2Q$

Risposta *h(t)* all'impulso *δ(t)*: forma oscillatoria con ampiezza smorzata esponenzialmente

$$h(t) = 1(t)\, A e^{-\alpha_o t} \cos\omega_o t$$

(è nota l'espressione della ampiezza A in funzione di f_o e Q, ma non è riportata perchè non è necessaria per i calcoli da eseguire in questo problema)

Funzione peso nel tempo $w_o(t)$ (per misura effettuata campionando al tempo t_m l'uscita del filtro): ha la forma della risposta alla δ, ma invertita nel tempo e traslata fino a portare la sua origine all'istante di misura t_m

$$w_o(t) = h(t_m - t) = 1(t_m - t)\, A e^{-\alpha_o (t_m - t)} \cos\omega_o (t_m - t)$$

Funzione di trasferimento in frequenza *H(f)* (ovvero funzione **peso in frequenza $W_o(f)$**)

- La parte principale è centrata sulla frequenza di risonanza f_o e $|H(f)|^2$ ed è bene approssimata da un andamento a parabola.
- Alla frequenza di risonanza lo sfasamento è nullo, cioè il segnale di uscita è allineato a quello in entrata.
- Alla frequenza di risonanza il guadagno è unitario, quindi il segnale di uscita è uguale a quello di ingresso anche in ampiezza
- la banda equivalente per valutare il valore efficace del rumore in uscita dal filtro è
$$\Delta f_{no} = \frac{\pi}{2}\frac{f_o}{Q} = 314 Hz$$

A2 – Valutazione del rumore e minimo segnale misurabile

Indicando con S_T la totale densità spettrale di rumore (rumore a larga banda più rumore *1/f*)

$$S_T\left(f_o\right) = S_v + S_v \frac{f_c}{f_o} = 1,5 \cdot S_v$$

il valore efficace del rumore è

$$\sqrt{\overline{v_{n,o}^2}} \approx \sqrt{S_T\left(f_o\right)} \cdot \sqrt{\Delta f_{n,o}} = \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{S_v} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{f_o}{Q}} \approx 2,17 \mu V$$

Dato che per segnale di ingresso a centro banda il guadagno è unitario, il rapporto S/N per una misura effettuata correttamente è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{V_s}{\sqrt{\overline{v_{n,o}^2}}}$$

e l'ampiezza del minimo segnale misurabile (per il quale risulta S/N=1) è

$$V_{s\min,o} = \sqrt{\overline{v_{n,o}^2}} = 2,17 \mu V$$

A3 – Modalità di corretta esecuzione della misura dell'uscita del filtro

La misura viene eseguita campionando l'uscita del filtro a un istante t_m che va scelto razionalmente per ottenere una corretta misura dell'ampiezza V_s.

Dato che il segnale di uscita dal filtro è uguale a quello di entrata, per ottenere una corretta misura dell'ampiezza V_s l'istante t_m deve corrispondere a un massimo del segnale stesso. Per individuare agevolmente questo istante anche in caso di segnale di piccola ampiezza, possiamo valerci del segnale di riferimento e sincronizzare il campionamento con un massimo del riferimento (cioè effettuarlo quando la fase del riferimento è zero).

Esaminando l'azione della funzione peso si conferma questa scelta di campionare l'uscita in corrispondenza a un massimo del riferimento. Infatti spostando l'istante di campionamento si sposta tutta la funzione peso e quindi si sposta la posizione dei suoi massimi rispetto a quelli del segnale sinusoidale. Tenendo presente come viene effettuato il pesaggio (moltiplicazione del peso per il segnale e integrazione del prodotto) è chiaro che per ottenere il risultato più elevato (e quindi il migliore S/N) occorre che la posizione in tempo dei massimi della funzione peso coincida con quella dei massimi del segnale.

Occorre anche verificare che la misura rilevi correttamente le variazioni di ampiezza del segnale che avvengono su tempi ≥ 1s.

L'ampiezza del segnale varia su tempi >1s, quindi il suo andamento è descritto nel domiinio di Fourier da componenti con frequenze <1Hz. Per rilevarla correttamente occorre usare frequenza di campionamento almeno 2Hz e curare che nella misura di un campione non vengano inclusi contributi dai campioni precedenti. Per questo occorre che la funzione peso di una misura scenda a livello trascurabile in un tempo nettamente più breve dell'intervallo tra i campioni, cioè entro ≈500ms.

Sappiamo che la funzione peso si smorza esponenzialmente allontanandosi da t_m

$$1\left(t_m - t\right)e^{-\alpha_o\left(t_m - t\right)} = 1\left(t_m - t\right)e^{-\left(t_m - t\right)/T_d}$$

in cui

$$T_d = \frac{1}{\alpha_o} = \frac{2Q}{\omega_o} = \frac{Q}{\pi f_o} \approx 1,6ms$$

Dunque la funzione peso si riduce a livello trascurabile per

$t_m - t = 5T_d \approx 8ms$ e quindi bene entro l'intervallo di 500ms tra i campioni

(B) Filtraggio con Lock-in Amplifier (LIA)

B1 - Parametri caratteristici e funzione peso del LIA

Il LIA è un filtro lineare a parametri variabili nel tempo, costituito essenzialmente da uno stadio che effettua la moltiplicazione tra segnale e riferimento seguito da uno stadio di filtraggio passabasso, in questo caso un semplice filtro RC a 1 polo con costante di tempo T_F, quindi con funzione peso

$$w_F\left(t\right) = 1\left(t_m - t\right)e^{-\left(t_m - t\right)/T_F}$$

Le misure di ampiezza vengono eseguite campionando l'uscita del LIA all'istante in cui si vuole rilevare una misura

Considerando la sua struttura essenziale, si vede chiaramente che il LIA ha funzione peso semplicemente data dal prodotto del riferimento per la funzione peso del passabasso

$$w_L\left(t\right) = B\cos\omega_o t \cdot w_F\left(t\right) = 1\left(t_m - t\right)e^{-\left(t_m - t\right)/T_F}B\cos\omega_o t$$

Si nota che:

a) spostando il tempo di campionamento dell'uscita si sposta la funzione esponenziale ma i massimi e minimi della funzione peso rimangono sincroni con il segnale di riferimento e non si spostano.

b) lo smorzamento è regolato dalla costante di tempo T_F .

Dunque per effettuare con il LIA un rilevamento corretto dell'andamento della ampiezza nel tempo occorre scegliere T_F in modo che sia $5T_F < 500ms$. Scegliamo T_F =50ms, quindi la banda passante del filtro passabasso risulta

$$f_{Fn} = \frac{1}{4T_F} = 5Hz$$

B2 – Valutazione del rumore e minimo segnale misurabile

Con riferimento sinusoidale in fase con il segnale, il $(S/N)^2$ risulta dato dal rapporto tra la potenza ($V_s^2/2$) del segnale sinusoidale e metà della potenza di rumore (componente di rumore in fase) entro la banda $2f_n$ centrata sulla frequenza f_o del riferimento.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_L = \frac{V_s}{\sqrt{2S_T f_{Fn}}}$$

Il minimo segnale rivelabile è quindi

$$V_{s\,\min,L} = \sqrt{2S_T f_{Fn}} = 387nV$$

B3 – Modalità di corretta esecuzione della misura dell'uscita del LIA e confronto con il filtro risonante

Per assicurare che la misura effettuata campionando l'uscita a intervalli di 500ms rilevi correttamente le variazioni di ampiezza del segnale abbiamo dimensionato adeguatamente la costante di tempo T_F del filtro passabasso del LIA.

<u>Utilizzando il LIA non occorre sincronizzare l'istante di campionamento con il segnale di riferimento</u>, a differenza di quanto visto per il filtro accordato. Osservando con attenzione la funzione peso, si nota infatti che spostando l'istante di misura t_m i massimi e i minimi non si spostano, rimangono sincronizzati al riferimento. Si sposta solo l'inviluppo esponenziale e quindi l'uscita non subisce variazioni al variare della fase del campionamento rispetto al riferimento, segue solo le lente variazioni di ampiezza del segnale.

La ragione di fondo per cui non occorre sincronizzare il campionamento dell'uscita del LIA sta nel fatto che nel LIA l'azione del moltiplicatore già assicura la sincronizzazione dell'operazione di filtraggio con il riferimento.

La ragione di fondo per cui con il LIA la minima ampiezza misurabile risulta assai minore che con il filtro risonante è che con il LIA si può facilmente ottenere una banda passante assai più stretta e la si può mantenere bene centrata sul segnale, anche se il segnale varia la sua frequenza e anche se l'apparato funziona in ambiente con condizioni variabili (variazioni di temperatura, ecc.)

(C) <u>Proposte per misura di ampiezza di segnali con frequenza nota e fase NON nota</u>

Vi sono casi in cui del segnale da misurare è nota la frequenza, non la fase, e interessa determinare solo l'ampiezza, non la fase.

Un approccio elementare è cercare di ottenere il risultato corretto ripetendo la misura più volte variando ogni volta la fase del riferimento e infine scegliendo quella che ha dato il valore più alto.

Questo procedimento ha vari difetti: è una procedura lunga e di esito un pò incerto, particolarmente se si deve operare con segnali molto piccoli e quindi con S/N modesto. Inoltre non è utilizzabile se la fase del segnale è non solo ignota, ma anche variabile nel tempo.

Un approccio più elaborato, ma più efficace, è quello di modificare l'apparato in modo da effettuare due misure contemporaneamente, utilizzando nella prima un segnale di riferimento alla frequenza nota del segnale e fase qualsiasi, nella seconda un altro riferimento in quadratura con il primo, cioè con la stessa frequenza e sfasato di un quarto di periodo (sfasamento $\pi/2$ rispetto al primo riferimento). In questo modo si misurano le ampiezze di due componenti ortogonali del segnale, che quindi possono essere sommate quadraticamente per ottenere il modulo del segnale.

Nel filtraggio con filtro accordato le due misure si possono ottenere campionando l'uscita del filtro con due apparati di campionamento, uno sincronizzato sul primo riferimento, l'altro sul secondo.

Nel filtraggio con LIA occorre utilizzare due apparati LIA eguali e utilizzare per uno il primo riferimento e per l'altro il secondo.