

PROBLEMA 2

Quadro dei dati

FIBRA OTTICA

$\alpha_{dB} = 2,5$ dB/km attenuazione del segnale trasmesso (dB di potenza)

$R=1\%$ frazione di luce riflessa dai giunti della fibra

$v_p = 20$ cm/ns velocità di propagazione nella fibra

DIODO LASER

$\lambda=850$ nm lunghezza d'onda

$T_L = 100$ ns durata dell'impulso rettangolare

$P_L = 1$ mW potenza dell'impulso laser

tasso di ripetizione r_L dell'impulso laser regolabile fino al massimo 10000 impulsi/secondo

FOTODIODO A VALANGA

APD in Silicio

$\eta = 0,60$ efficienza quantica di rivelazione

$M=100$ guadagno (fattore di moltiplicazione)

$F=4$ fattore di eccesso di rumore

$I_b = 100$ pA corrente di buio misurata in uscita dello APD

FOTOMOLTIPLICATORE

PMT con fotocatodo S1

$\eta = 0,004$ efficienza quantica di rivelazione

$M=10^6$ guadagno (fattore di moltiplicazione)

$F=2$ fattore di eccesso di rumore

$I_b = 30$ nA corrente di buio misurata all'anodo del PMT

IMPEDENZA DI CARICO

$R_L=500\Omega$ con in parallelo $C_L = 2$ pF

PREAMPLIFICATORE

$f_{pa}=250$ MHz banda passante di rumore limitata da polo semplice con costante di tempo $\tau_{pa} = 1$ ns

$\sqrt{S_{va}} = 1$ nV/ \sqrt{Hz} rumore di tensione equivalente all'ingresso

$\sqrt{S_{ia}} = 1$ pA/ \sqrt{Hz} rumore di corrente equivalente all'ingresso

(A) Misura con fotodiode a valanga

A1) Minimo segnale misurabile e lunghezza di fibra esplorata

Il circuito elettronico è lo stesso utilizzato nel Problema 1, quindi la densità di rumore di corrente totale del circuito è la stessa

$$S_{iT} = S_{ia} + \frac{4kT}{R_L} + \frac{S_{va}}{R_L^2} = (1 pA/\sqrt{Hz})^2 + (5,6 pA/\sqrt{Hz})^2 + (2 pA/\sqrt{Hz})^2 \approx (6 pA/\sqrt{Hz})^2$$

Valutiamo e confrontiamo la densità S_{bm} del rumore di corrente di buio del fotodiode a valanga. Consideriamo la corrente di buio primaria di generazione termica nel diode

$$I_{bp} = \frac{I_b}{M} = 1 pA$$

la densità di rumore shot di questa corrente primaria è

$$S_{bp} = 2qI_{bp} = 2q \frac{I_b}{M}$$

essa produce in uscita dallo APD una densità di rumore S_{bm} amplificata per il fattore M^2 e ulteriormente accresciuta dal fattore di eccesso di rumore F dovuto alla statistica di moltiplicazione

$$S_{bm} = S_{bp} M^2 F = 2qI_b M F \approx 1,28 \cdot 10^{-26} = (0,1 pA/\sqrt{Hz})^2$$

Nonostante il fotorivelatore APD abbia un considerevole guadagno interno $M=100$ la densità di rumore del fotorivelatore risulta ancora trascurabile e quella del rumore dell'elettronica dominante, in quanto il valore del guadagno non è abbastanza elevato per cambiare l'importanza relativa dei due contributi.

Utilizzando un GI con durata di integrazione eguale a quella del segnale, la banda di filtraggio per il rumore è

$$f_i = f_L = 1/2T_L = 5 MHz$$

Il rumore nella misura con GI è ancora quello dovuto all'elettronica

$$\sqrt{n_{io}^2} = \sqrt{S_{iT} f_i} = 13,4 nA$$

Il segnale di corrente misurabile minimo in uscita dello APD quindi risulta

$$I_{D,\min} = \sqrt{n_{io}^2} = 13,4 nA$$

Ricaviamo la fotocorrente primaria minima dividendo per il guadagno dello APD

$$I_{pD,\min} = \frac{I_{D,\min}}{M} = 134 pA$$

La responsività nella trasduzione da potenza ottica P_s a fotocorrente primaria I_{pD} è

$$S_{pD} = \frac{I_{pD}}{P_s} = \eta \frac{\lambda}{1,24} = 0,41 \frac{A}{W}$$

e con essa ricaviamo la potenza ottica minima misurabile

$$P_{S,\min} = \frac{I_{pD,\min}}{S_{pD}} = 326 \text{ pW}$$

L'attenuazione massima misurabile quindi è

$$A_{\max} = \frac{P_R}{P_{S,\min}} = 30675$$

ovvero in dB

$$A_{dB,\max} = 10 \log_{10} A_{\max} = 44,9 \text{ dB}$$

La distanza massima dall'inizio fibra di un giunto osservabile quindi è

$$L_{\max} = \frac{A_{dB,\max}}{2a_{dB}} \approx 9 \text{ km}$$

A2) Misura con media di N acquisizioni del GI

I contributi di rumore nelle varie acquisizioni anche in questo caso sono incorrelati tra loro, quindi si sommano quadraticamente e pertanto:

- il rapporto S/N migliora del fattore \sqrt{N}
- il segnale minimo misurabile si riduce del fattore \sqrt{N}
- l'attenuazione massima aumenta del fattore \sqrt{N}
- ovvero l'attenuazione massima misurata in dB ha un incremento $\Delta A_{dB} = 10 \log \sqrt{N}$

- la distanza massima in fibra corrispondentemente aumenta di una quantità

$$\Delta L_{\max} = \frac{\Delta A_{dB}}{2a_{dB}} \quad \text{cioè nel nostro caso} \quad \Delta L_{\max} = 2 \log \sqrt{N} \quad \text{in km}$$

Pertanto utilizzando la media su N=10000 la distanza esplorabile aumenta di 4km arrivando a una distanza massima $L_{\max}=13 \text{ km}$

(B) Misura con fotomoltiplicatore

Il circuito elettronico è lo stesso utilizzato con lo APD, quindi la densità di rumore di corrente totale del circuito è la stessa

$$S_{iT} = S_{ia} + \frac{4kT}{R_L} + \frac{S_{va}}{R_L^2} = (1 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}})^2 + (5,6 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}})^2 + (2 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}})^2 \approx (6 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}})^2$$

Valutiamo e confrontiamo la densità S_{ba} del rumore di corrente di buio del fotomoltiplicatore.

Consideriamo la corrente di buio primaria data da emissione termica di elettroni dal fotocatodo I_{bk}

$$I_{bk} = \frac{I_{ba}}{M} = 3 \cdot 10^{-14} \text{ A} = 30 \text{ fA}$$

la densità di rumore shot di questa corrente primaria

$$S_{bk} = 2qI_{bk} = 2q \frac{I_{ba}}{M} = \left(98 \text{ aA}/\sqrt{\text{Hz}}\right)^2$$

produce in uscita dallo APD una densità di rumore S_{bm} amplificata per il fattore M^2 e ulteriormente accresciuta dal fattore di eccesso di rumore F dovuto alla statistica di moltiplicazione

$$S_{ba} = S_{bk} M^2 F = 2qI_{ba} MF \approx 1,9 \cdot 10^{-20} \text{ A}^2/\text{Hz} = \left(138 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}\right)^2$$

Nel caso del PMT l'elevato guadagno del rivelatore fa sì che la densità di rumore della corrente di buio del PMT all'anodo del PMT sia molto maggiore di quella dell'elettronica, che risulta trascurabile.

Utilizzando un GI con durata di integrazione eguale a quella del segnale, la banda di filtraggio per il rumore è

$$f_i = f_L = 1/2T_L = 5 \text{ MHz}$$

e il rumore dovuto alla corrente di buio del PMT quindi è

$$\sqrt{n_{ba}^2} = \sqrt{S_{ba} f_i} = \sqrt{\frac{q}{T_L} M F I_{ba}} = 0,31 \mu\text{A}$$

Questo rumore di corrente di buio pone al segnale misurabile all'anodo del PMT un limite minimo

$$I_{sa, \min b} = \sqrt{n_{ba}^2} = 0,31 \mu\text{A}$$

Nel caso del PMT però oltre al rumore shot della corrente di rumore occorre considerare anche il rumore shot della corrente di segnale (fotocorrente), che potrebbe porre un limite minimo anche più stringente. Indicando con I_{sk} la fotocorrente al catodo

$$I_{sk} = \frac{I_{sa}}{M} = 10^{-6} I_{sa}$$

la densità di rumore shot di questa corrente

$$S_{sk} = 2qI_{sk} = 2q \frac{I_{sa}}{M}$$

produce in uscita dallo APD una densità di rumore S_{sa} amplificata per il fattore M^2 e ulteriormente accresciuta dal fattore F

$$S_{sa} = S_{sk} M^2 F = 2qI_{sa} MF$$

Considerando solo il rumore della fotocorrente il S/N sarebbe

$$\frac{S}{N} = \frac{I_{sa}}{\sqrt{2qI_{sa} MF f_i}} = \sqrt{\frac{I_{sa}}{\frac{q}{T_L} MF}}$$

e il limite posto dal rumore di fotocorrente al segnale minimo rivelabile (il segnale per cui S/N=1) è

$$I_{sa,\min p} = \frac{q}{T_L} MF = 3,2 \mu A$$

In linea di principio il segnale minimo rivelabile andrebbe valutato tenendo conto non solo del rumore di fotocorrente, ma anche del rumore di corrente di buio e quindi sarebbe un pò maggiore del valore qui sopra riportato. Tuttavia i dati quantitativi di questo caso sono tali che l'incremento è in pratica trascurabile: il rumore totale risulterebbe solo 1% maggiore del rumore della fotocorrente

$$\sqrt{n_a^2} = \sqrt{n_{ba}^2 + \left(\frac{q}{T_L} MF\right)^2} = \sqrt{(0,23)^2 + 3,2^2} \mu A = 3,21 \mu A$$

Possiamo quindi assumere fotocorrente minima misurabile all'anodo del PMT

$$I_{sa,\min} \approx I_{sa,\min p} = 3,2 \mu A$$

La corrispondente minima fotocorrente al catodo è

$$I_{sk,\min} = \frac{I_{sa,\min}}{M} = 3,2 pA$$

La responsività nella trasduzione da potenza ottica P_s a fotocorrente I_{sk} al catodo del PMT è

$$S_{pk} = \frac{I_{sk}}{P_s} = \eta \frac{\lambda}{1,24} = 0,0027 \frac{A}{W}$$

e con essa ricaviamo la potenza ottica minima misurabile

$$P_{S,\min} = \frac{I_{sk,\min}}{S_{pk}} = 1,17 nW$$

L'attenuazione massima misurabile quindi è

$$A_{\max} = \frac{P_R}{P_{S,\min}} = 8547$$

ovvero in dB

$$A_{dB,\max} = 10 \log_{10} A_{\max} = 39,3 dB$$

La distanza massima dall'inizio fibra di un giunto osservabile quindi è

$$L_{\max} = \frac{A_{dB,\max}}{2a_{dB}} \approx 7,9 km$$

B2) Misura con media di N=10000 acquisizioni del GI

I contributi di rumore nelle varie acquisizioni anche in questo caso sono incorrelati tra loro, quindi si sommano quadraticamente e pertanto il rapporto S/N migliora del fattore \sqrt{N} . Occorre però rivedere il confronto tra il limite posto al segnale minimo misurabile dal rumore di fotocorrente e il limite posto dal rumore di corrente di buio. Infatti i due limiti diminuiscono con leggi diverse al crescere di N e pertanto la loro importanza relativa varia con N.

Se si considera solo il rumore della fotocorrente, il S/N di una media su N acquisizioni è

$$\frac{S}{N} = \sqrt{N} \frac{I_{sa}}{\sqrt{2qI_{sa}MFf_i}} = \sqrt{\frac{I_{sa}}{\frac{1}{N} \frac{q}{T_L} MF}}$$

Dunque questo segnale minimo viene diminuito del fattore \sqrt{N}

$$I_{sa, \min p}(N) = \frac{1}{N} \frac{q}{T_L} MF = \frac{1}{N} \cdot 3,2 \mu A$$

Quindi con N=10000 si ha

$$I_{sa, \min p}(10000) = 0,32 nA$$

Se si considera invece il solo rumore della corrente di buio, il S/N di una media su N acquisizioni è

$$\frac{S}{N} = \sqrt{N} \frac{I_{sa}}{\sqrt{2qI_{ba}MFf_i}} = \sqrt{N} \frac{I_{sa}}{\sqrt{\frac{q}{T_L} MF I_{ba}}}$$

e il segnale minimo decresce del fattore \sqrt{N} ,

$$I_{sa, \min b}(N) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{T_L} MF I_{ba}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot 0,31 \mu A$$

Al crescere di N questo limite minimo dovuto alla sola corrente di buio diminuisce più lentamente del limite minimo dovuto alla fotocorrente. Con N=10000 si ha

$$I_{sa, \min b}(10000) = 3,1 nA$$

Perciò risulta che in una misura mediata su N=10000 acquisizioni il segnale minimo misurabile è limitato dal rumore della corrente di buio e non più dal rumore della fotocorrente, come era invece nella misura con una singola acquisizione

$$I_{sa, \min}(10000) = I_{sa, \min b}(10000) = 3,1 nA$$

La corrispondente minima corrente al catodo è

$$I_{sk, \min} = \frac{I_{sa, \min}}{M} = 3,1 fA$$

che data la responsività $S_{pk}=0,0027A/W$ corrisponde a potenza ottica minima misurabile

$$P_{S,\min} = \frac{I_{sk,\min}}{S_{pk}} = 1,15 pW$$

L'attenuazione massima misurabile in queste condizioni è

$$A_{\max} = \frac{P_R}{P_{S,\min}} = 8,7 \cdot 10^6$$

ovvero in dB

$$A_{dB,\max} = 10 \log_{10} A_{\max} = 69,4 dB$$

La distanza massima dall'inizio fibra di un giunto osservabile quindi è quindi in questo caso

$$L_{\max} = \frac{A_{dB,\max}}{2\alpha_{dB}} \approx 13,9 km$$

B3) Confronto tra PMT e APD

Le caratteristiche principali dei fotorivelatore da confrontare per capire le loro prestazioni nella misura di deboli segnali ottici sono :

1. La responsività e quindi l'efficienza quantica, nella quale lo APD è in vantaggio di un fattore $0,6/0,004=150$.

A parità di segnale minimo di corrente, la potenza ottica minima corrispondente è inversamente proporzionale all'efficienza quantica.

2. Il guadagno interno M, nel quale il PMT è in vantaggio di un fattore $10^6/10^2=10^4$.

Se non c'è guadagno (come nel caso del PIN) o il valore di M è moderato (come nel caso dello APD) il rumore dell'elettronica è dominante ai fini del calcolo del segnale minimo di corrente.

Se invece il guadagno M è molto elevato, come è nel caso del PMT, il rumore dell'elettronica diviene trascurabile ai fini del calcolo del segnale minimo di corrente, che quindi dipende solo dal rumore di corrente del PMT.

Va notato però che anche il moderato guadagno M dello APD è utile per migliorare la misura, dato che a parità di segnale di corrente minimo misurabile la potenza ottica minima misurabile è inversamente proporzionale al guadagno M. Questo spiega perchè i risultati ottenuti con lo APD sono migliori di quelli ottenuti nel problema 1 con un fotodiodo PIN, nonostante il PIN abbia efficienza quantica maggiore di quella dello APD.