PROBLEMA 1

Quadro dei dati

Segnale:
A_P ampiezza da misurare
T_P = 25 μs costante di tempo dell'esponenziale
T_R = 1 ms intervallo tra un impulso e il successivo

Rumore:
$\sqrt{S_{Vu}}$ = 50 nV/(Hz)$^{1/2}$ (unilatera)
banda limitata da polo a f_V = 100 MHz

Disturbo sinusoidale:
$A_D \approx$ 100 μV ampiezza
f_D = 20 kHz frequenza nota con incertezza ± 1% ; fase non nota

componente di rumore *1/f*
f_C = 40 kHz

(A) Filtraggio ottimo

Banda del segnale $$f_p = \frac{1}{2\pi T_p} = 6,4kHz$$

Il rumore ha spettro costante fino a frequenza $f_V >> f_p$, quindi è trattabile come rumore bianco.
Pertanto: forma funzione peso del filtro ottimo = forma del segnale

$$w_o(t) = \frac{1}{T_p} e^{-t/T_p}$$

In uscita dal filtro ottimo:

segnale $$s_o = \int_0^\infty A_p e^{-t/T_p} w_o(t)\, dt = \frac{A_p}{2}$$

(rumore)^2 $$\overline{n_o^2} = S_{Vb} \int_0^\infty w_o^2(t) dt = \frac{S_{Vb}}{2T_p} = \frac{S_{Vu}}{4T_p}$$

S/N $$\left(\frac{S}{N}\right)_o = A_p \sqrt{\frac{T_p}{S_{Vu}}}$$

ampiezza minima misurabile $$A_{p\min,o} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{T_p}} = 10\mu V$$

(B) Approssimazione dell'ottimo con semplice filtro a parametri costanti

La funzione peso del filtro deve approssimare quella del filtro ottimo, sia in tempo che in frequenza. Deve quindi essere un filtro passabasso. Il suo limite di banda deve essere simile a quello del segnale. Anche la forma della funzione peso deve essere simile a quella del segnale.

Scegliamo un semplice passabasso RC. Notiamo che facendo $RC=T_P$ il modulo della sua funzione peso è identico a quello del filtro ottimo e perciò è identico il filtraggio del rumore.

Il filtraggio del segnale è invece diverso e nettamente peggiore rispetto all'ottimo, in quanto lo RC ha funzione peso ribaltata rispetto a quella dell'ottimo, sia in tempo che in frequenza.

Facendo il calcolo del S/N in funzione di RC si può confermare che la migliore scelta di RC è $RC=T_P$. Il rumore si ricava immediatamente con la banda 1/4RC. Il calcolo del massimo del segnale è semplice ma abbastanza laborioso. Risulta peraltro abbastanza chiaro che con $RC=T_P$ si ha S/N massimo. Infatti diminuendo $RC<T_P$ il massimo del segnale aumenta poco mentre il rumore aumenta più nettamente (aumento di banda); aumentando $RC>T_P$ il rumore diminuisce, ma il massimo del segnale diminuisce più nettamente.

Un filtro RC con $RC=T_P$ ha funzione risposta alla δ

$$h_R(t) = 1(t)\frac{1}{T_p}e^{-t/T_p} = w_R(-t)$$

Quindi in uscita si ha

segnale $$s_R(t) = A_p e^{-t/T_p} * h_R(t) = A_p \frac{t}{T_p} e^{-t/T_p}$$

a $t=T_p$ massimo del segnale $$s_{R\max} = \frac{A_p}{e}$$

(rumore)^2 $$\overline{n_R^2} = \frac{S_{Vb}}{2T_p} = \frac{S_{Vu}}{4T_p} = \overline{n_o^2}$$

S/N $$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_p}{e}\sqrt{\frac{4T_p}{S_{Vu}}} = A_p\sqrt{\frac{T_p}{S_{Vu}}}\cdot\frac{2}{e}$$

ampiezza minima misurabile $$A_{p\min,R} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{S_{Vu}}{T_p}} = \frac{e}{2}A_{p\min,o} = 13,6\mu V$$

(C) <u>Effetto del disturbo a radiofrequenza con il filtraggio a semplice RC</u>

Il disturbo viene attenuato dal filtro passabasso, ma l'attenuazione è modesta perchè la frequenza del disturbo $f_D = 20\ kHz$ è poco superiore al limite di banda del filtro $f_R=f_p=6,4\ kHz$

$$\left|H(f_D)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f_D/f_R\right)^2}} \approx 0,3$$

Dunque in uscita dallo RC il disturbo ha ampiezza $A_D \cdot \left| H_R\left(f_D\right) \right| \approx 30\mu V$

e qui si confronta con un segnale in uscita di ampiezza $\dfrac{A_p}{e}$ e pertanto si confronta con un segnale

minimo misurabile limitato dal rumore di ampiezza $\dfrac{A_{p\min,R}}{e} = \dfrac{13,6\mu V}{e} \approx 5\mu V$

Il residuo disturbo all'uscita dello RC è quindi molto superiore (per un fattore 6) al limite posto dal rumore

(D) <u>Filtraggio con riduzione del disturbo elettromagnetico a radiofrequenza</u>

D1 Cancellazione del disturbo a radiofrequenza con uno zero della funzione peso del filtro

Un Gated Integrator con durata di integrazione T_G ha funzione peso con zeri in corrispondenza alle frequenze multiple intere di $f_G=1/T_G$. Si può cancellare il disturbo a radiofrequenza con uno di questi zeri.

Dobbiamo però verificare che questo si ottenga con un valore di T_G che assicuri anche un buon filtraggio del rumore, possibilmente vicino a quello del filtro ottimo o almeno paragonabile a quello del filtro RC visto.

Consideriamo un GI con il primo zero in corrispondenza a f_D (cioè con $T_G = 1/f_D$) e confrontiamo la sua banda in frequenza con quella del filtro ottimo notando i valori in gioco (banda del filtro ottimo $f_p=6,4\ kHz$ e disturbo a radiofrequenza $f_D = 20\ kHz$): appare intuitivamente possibile ottenere un buon risultato con questo GI.

Valutiamo quindi il S/N ottenibile con un GI con $T_G = 1/ f_D = 50\mu s$ che inizia in corrispondenza all'inizio dell'impulso. In uscita dal GI abbiamo:

segnale $$s_G = \int_0^{T_G} A_p e^{-t/T_p} \frac{1}{T_G} dt = A_p \frac{T_p}{T_G}\left(1-e^{-T_G/T_p}\right)$$

rumore $$\sqrt{\overline{n_G^2}} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{2T_G}}$$

S/N $$\left(\frac{S}{N}\right)_G = A_p\sqrt{\frac{T_p}{S_{Vu}}} \cdot \sqrt{\frac{2T_p}{T_G}} \cdot \left(1-e^{-T_G/T_p}\right)$$

Quindi l'ampiezza minima misurabile è

$$A_{p\min,G} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{T_p}} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2T_p}{T_G}} \cdot \left(1-e^{-T_G/T_p}\right)}$$

Nel caso considerato è $\dfrac{T_G}{T_p} = 2$ e quindi si ottiene un filtraggio del rumore piuttosto soddisfacente, nettamente migliore di quello ottenuto con il filtro RC

$$A_{p\min,G} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{T_p}}\frac{1}{\left(1-e^{-2}\right)} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{T_p}}\cdot 1{,}156 = 1{,}156\cdot A_{p\min,o} = 11{,}56\mu V$$

D2 Cancellazione imperfetta causata da incertezza del valore della frequenza del disturbo

Se la frequenza del disturbo f_D si discosta dalla frequenza $f_G = 1/T_G$ dello zero della funzione peso di una quantità Δf_G dello 1%, cioè se

$$f_D = f_G \pm \Delta f_G = f_G \pm 0{,}01 f_G$$

la funzione peso del GI a f_D si scosta dallo zero a f_G di una quantità piccola, valutabile con una approssimazione al 1°ordine della funzione peso del GI

$$W_G = \sin c\left(\pi f T_G\right) = \sin\left(\frac{\sin \pi f T_G}{\pi f T_G}\right)$$

visto che $\quad W_G\left(f_G\right) = 0 \quad$ e $\quad \left(\frac{dW_G}{df}\right)_{f_G} = \frac{1}{f_G}$

si ha

$$W_G\left(f_G + \Delta f_G\right) \approx W_G\left(f_G\right) + \left(\frac{dW_G}{df}\right)_{f_G}\Delta f_G = \frac{\Delta f_G}{f_G}$$

Dato che l'incertezza della frequenza del disturbo è limitata a ± 1% il residuo disturbo non cancellato all'uscita del GI è limitato a

$$A_D\frac{\Delta f_G}{f_G} = \pm 1\mu V$$

Questo residuo disturbo va confrontato con il segnale in uscita dal GI

$$s_G = \frac{A_p}{2}\left(1-e^{-2}\right) = 0{,}432 A_p$$

e quindi il residuo disturbo all'uscita del GI risulta abbastanza minore del segnale minimo misurabile che all'uscita del GI è

$$0{,}432 A_{p\min,G} \approx 5\mu V$$

(E) <u>Riduzione del rumore 1/f</u>

Il filtraggio passabasso del GI ha una frequenza di taglio del rumore

$f_S = \dfrac{1}{2T_G} = 10\,kHz$ quindi il contributo del rumore bianco in uscita dal GI è

$$\sqrt{\overline{n_G^2}} = \sqrt{\frac{S_{Vu}}{2T_G}} = 5\mu V$$

Il rumore 1/f ha frequenza d'angolo $f_C = 40kHz$ nettamente maggiore di f_s e quindi la sua densità è nettamente maggiore di quella del rumore bianco su tutta la banda del segnale. Il contributo del rumore 1/f perciò è comunque maggiore di quello del rumore bianco e per limitarlo occorre introdurre prima del GI un filtraggio passa-alto capace di attenuare il rumore alle basse frequenze senza ridurre il segnale. Indicando con f_i la frequenza di taglio del filtraggio passalto possiamo stimare in prima approssimazione il contributo del rumore 1/f in uscita dal GI utilizzando l'approssimazione a taglio netto in frequenza:

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx \sqrt{S_{Vu}}\sqrt{f_C}\sqrt{\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)} = 10\mu V \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)}$$

Per ridurre il contributo di rumore 1/f a livello non molto maggiore di quello del rumore bianco occorre avere una frequenza di taglio passalto f_i non molto minore di quella di taglio passabasso f_S .

Con CDS realizzato con azzeramento della linea di base prima dell'inizio delle misure si ottiene f_i molto piccola, tipicamente $f_i \approx 0{,}001$Hz (dato il lungo intervallo tra azzeramento e misura). Questa soluzione non è soddisfacente, verifichiamo infatti che

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 10\mu V \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)} \approx 56\mu V$$

(il fattore $\sqrt{2}$ di aumento del rumore entro la banda è dovuto al CDS)

Risulta non adatto anche un filtro passalto a parametri costanti: esso agiscce anche sul segnale e una f_i vicina a f_S è anche vicina alla banda del segnale f_p , pertanto questo taglio passalto riduce considerevolmente l'ampiezza del segnale.

Per questo caso risultano adatte soluzioni di filtraggio passalto basate su filtri a parametri variabili nel tempo che producano un taglio passa-alto sul rumore ma non agiscano sul segnale. Questo si può ottenere utilizzando un Baseline Restorer (BLR) prima del GI, dimensionando la costante di tempo del BLR in modo da ottenere una f_i adatta.

Dato però che nel nostro caso già si utilizza un GI, risulta più semplice ed efficace realizzare (senza introdurre altri circuiti di filtraggio) un <u>Correlated Double Filtering (CDF)</u> misurando l'ampiezza di un impulso come differenza di <u>due acquisizioni del GI</u>. Precisamente: a) l'acquisizione già considerata (acquisizione dell'impulso) che inizia quando inizia l'impulso e b) un'altra (acquisizione della linea di base) che precede l'impulso di un intervallo T_i maggiore di T_G, con T_i di valore tale che le due acquisizioni non si sovrappongano. È facile effettuare la corretta sincronizzazione delle due acquisizioni, dato che gli impulsi sono periodici con frequenza di ripetizione nota f_R=*1 kHz* ed è disponibile un segnale ausiliario che indica l'inizio di ciascun impulso. Sottraendo l'acquisizione di linea di base dalla acquisizione dell'impulso si ottiene il filtraggio passalto, mentre il filtraggio passabasso del GI agisce su entrambe le acquisizioni. La funzione peso del CDF risulta dalla convoluzione della funzione peso del GI con quella di CDS

(Correlated Double Sampling) con intervallo T_i . Con buona approssimazione la frequenza di taglio passalto è quella data dal CDS

$f_i = \dfrac{1}{2\pi T_i}$ Ad esempio scegliendo T_i =60 μs abbiamo $f_i \approx 2{,}65$ kHz e valutiamo pertanto

$$\sqrt{\overline{n_f^2}} \approx 10\mu V \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)} \approx 16\mu V$$

Come notato sin dall'inizio di questa sezione E, il rumore 1/f è comunque maggiore del rumore bianco, ma con questo filtraggio risulta ridotto a livello poco maggiore. Notiamo inoltre che il rumore 1/f in realtà è un pò minore di quanto abbiamo approssimativamente stimato.
L'approssimazione a taglio netto infatti sovrastima il contributo delrumore 1/f quando il rapporto tra le frequenze di taglio non è elevato, come si appunto verifica nel nostro caso in cui $f_S / f_i \approx 3{,}8$.