PROBLEMA 1

Quadro dei dati

SEGNALE A IMPULSO

$$s_i(t) = \frac{V_P}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{T_P}\left(t - \frac{T_P}{2}\right)\right]\right\} \qquad \text{nell'intervallo} \qquad 0 < t < T_P = 10\mu s$$

RUMORE BIANCO

$\sqrt{S_u} = 20nV/\sqrt{Hz}$ unilatera (cioè $\sqrt{S_b} = 10nV/\sqrt{Hz}$ bilatera)

limitato ad alta frequenza da un polo semplice con costante di tempo

$T_n = 10ns$ in (A), (B) e (C) $\qquad T_{nL} = 2\mu s$ in (D)

FILTRI INTEGRATORI COMMUTATI

Filtro passivo	$R_1 = 10k\Omega$		C_1 *da scegliere*	$T_{F1} = R_1 C_1$
Filtro attivo	$R_2 = 1M\Omega$	$R_3 = 10k\Omega$	C_2 *da scegliere*	$T_{F2} = R_2 C_2$

IMPULSI RIPETITIVI

in (B) e (D) a frequenza fissa $f_R = 100\ Hz$

in (C) a frequenza variabile f_R *da 100 Hz a 200Hz*

(A) Misura di singolo impulso

A1) Misura con filtraggio ottimo

Con rumore bianco il filtro ottimo ha funzione peso w_o di forma eguale al segnale s_i normalizzato ad area unitaria. L'area A di s_i è immediatamente valutabile (forma data da un periodo di sinusoide)

$$A = \int_0^{T_P} s_i dt = \frac{V_P}{2} T_P$$

$$w_o(t) = \frac{s_i}{A} = \frac{1}{T_P}\left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{T_P}\left(t - \frac{T_P}{2}\right)\right]\right\}$$

$$k_{ww,o}(0) = \frac{1}{T_P^2}\int_0^{T_P}\left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{T_P}\left(t - \frac{T_P}{2}\right)\right]\right\}^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_P^2}\int_0^{T_P}\left\{1 + 2\cos\left[\frac{2\pi}{T_P}\left(t - \frac{T_P}{2}\right)\right] + \cos^2\left[\frac{2\pi}{T_P}\left(t - \frac{T_P}{2}\right)\right]\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{T_P^2}\left\{T_P + 0 + \frac{T_P}{2}\right\} = \frac{3}{2}\frac{1}{T_P}$$

In uscita dal filtro ottimo si ha

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{V_P}{2} T_P\, k_{ww}(0) \frac{1}{\sqrt{S_b}\sqrt{k_{ww}(0)}} = \frac{V_P}{\sqrt{S_u}}\sqrt{\frac{3}{4}T_P}$$

$$V_{P\min,o} = \sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{S_u}}{\sqrt{T_P}} = 7{,}3\mu V$$

A2) Realizzazione di Gated Integrator

I due circuiti indicati effettuano una integrazione approssimata sulla durata T_P (determinata dal comando dato allo switch dall'impulso ausiliario sincrono con il segnale) con costante di tempo di integrazione finita $T_F >> T_P$. Indicando con α la variabile tempo (dalla fine dell'integrazione verso i tempi precedenti) la funzione peso ha ampiezza che decade lentamente con andamento

$$e^{-\alpha/T_F} \approx 1 - \frac{\alpha}{T_F}$$

Un GI ideale ha funzione peso con ampiezza costante, quindi per avere scostamenti da questo inferiori allo 1% occorre avere

$$\frac{T_P}{T_F} \le \frac{1}{100} \qquad \text{cioè} \qquad T_F \ge 100 T_P \approx 1ms$$

Scegliamo per i due circuiti

$T_{F1} = R_1 C_1 = 1ms$ e quindi C_1 =100nF

$T_{F2} = R_2 C_2 = 1ms$ e quindi C_2 =1nF

A3) Misura con Gated Integrator

Realizzato con il circuito passivo

funzione peso $\quad w_{G1} = \frac{1}{T_{F1}}$ nell'intervallo $0 < t < T_P = 10\mu s$

segnale in uscita $\quad s_{u1} = \int_0^{T_P} s_i \frac{1}{T_{F1}} d\alpha = \frac{V_P}{2}\frac{T_P}{T_{F1}}$

rumore in uscita $\quad \overline{n_{u1}^2} = S_b k_{ww,G1}(0) = \frac{S_b}{T_P}\left(\frac{T_P}{T_{F1}}\right)^2$

S/N $\quad \left(\frac{S}{N}\right)_{G1} = \frac{s_{u1}}{\sqrt{\overline{n_{u1}^2}}} = \frac{V_P}{2}\frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{S_b}} = V_P \frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{2S_u}}$

minima ampiezza in ingresso $\quad V_{p\min,G1} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{S_u}}{\sqrt{T_P}} \approx 8,95\mu V$

confronto con ottimo $\quad \frac{V_{P\min,G1}}{V_{P\min,o}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225$

ampiezza del segnale di uscita corrispondente al minimo misurabile

$$s_{u1,\min} = \frac{V_{P\min,G1}}{2}\frac{T_P}{T_{F1}} = \frac{V_{P\min,G1}}{200} \approx 45nV$$

Realizzato con il circuito attivo

funzione peso $\quad w_{G2} = \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{R_2 C_2} = \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{T_{F2}}$ nell'intervallo $0 < t < T_P = 10\mu s$

segnale in uscita $\quad s_{u2} = \int_0^{T_P} s_i \frac{R_2}{R_3}\frac{1}{T_{F2}} d\alpha = \frac{V_P}{2}\frac{T_P}{T_{F2}}\frac{R_2}{R_3}$

rumore in uscita $\overline{n_{u2}^2} = S_b k_{ww,G2}(0) = \frac{S_b}{T_P}\left(\frac{T_P}{T_{F2}}\right)^2\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2$

S/N $\left(\frac{S}{N}\right)_{G2} = \frac{s_{u2}}{\sqrt{\overline{n_{u2}^2}}} = \frac{V_P}{2}\frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{S_b}} = V_P\frac{\sqrt{T_P}}{\sqrt{2S_u}}$ uguale al circuito passivo

minima ampiezza $V_{p\min,G2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{S_u}}{\sqrt{T_P}} \approx 8,95\mu V$ uguale al circuito passivo

ampiezza del segnale di uscita corrispondente al minimo misurabile

$$s_{u2,\min} = \frac{V_{P\min,G2}}{2}\frac{T_P}{T_{F2}}\frac{R_2}{R_3} = \frac{V_{P\min,G2}}{2} = 4,48\mu V$$

I due circuiti realizzano lo stesso tipo di filtraggio (Gated Integrator), ma il circuito attivo include anche il fattore di guadagno R_2/R_3. Questo guadagno agisce sul segnale e sul rumore, quindi non cambia il S/N e non cambia il minimo segnale di ingresso misurabile. Cambia invece l'ampiezza del segnale in uscita, che a parità di segnale di ingresso risulta molto maggiore per il circuito attivo.

Avere un segnale di uscita più alto è utile per rendere meno stringenti i requisiti di rumore proprio e amplificazione da porre all'elettronica che segue e agisce sul segnale per adeguarlo alla dinamica di ingresso dello strumento che effettua la misura (tipicamente un ADC).

(B) <u>Misura con impulsi ripetitivi a frequenza costante f_R= *100Hz*</u>

Si può sfruttare la ridondanza dell'informazione (gli impulsi eguali) effettuando una acquisizione su ciascun impulso della sequenza (chiudendo lo switch in corrispondenza a ogni impulso) e facendo una media (o una somma) di queste acquisizioni, accumulandole nel filtro integratore. Il S/N migliora perchè i contributi di rumore acquisiti insieme ai vari impulsi sono incorrelati tra loro, in quanto il tempo di autocorrelazione del rumore $T_n=10ns$ è molto più breve dell'intervallo tra gli impulsi $T_R=1/f_R= 10ms$. I segnali acquisiti si sommano linearmente nella media, mentre i contributi di rumore si sommano quadraticamente.

Si deve però tener presente che nella sequenza l'ampiezza V_P degli impulsi può essere considerata costante solo su intervalli di tempo fino a T_A=10s e pertanto occorre dimensionare il filtro in modo che esso dia peso trascurabile (cioè <0,01) alle acquisizioni che precedono di oltre 10s l'istante di misura.

B1 Filtro passivo

Il condensatore si scarica solo durante la chiusura dello switch, cioè per la durata T_P di ogni impulso. Pertanto da un impulso all'impulso precedente la funzione peso è più piccola del fattore

$$r = \exp\left(-\frac{T_P}{T_{F1}}\right) \approx 1 - \frac{T_P}{T_{F1}}$$

<u>La ragione *r* della regressione geometrica dei pesi è indipendente dalla frequenza di ripetizione f_R</u>. Il filtro è un <u>BOXCAR INTEGRATOR (BI).</u>

Il BI effettua un filtraggio a media esponenziale con ragione *r* dei campioni acquisiti dal GI. Il risultato migliora aumentando il numero di campioni, ma occorre impiegare solo i campioni disponibili entro l'intervallo di 10s in cui si può considerare costante l'ampiezza dell'impulso. Con frequenza $f_R = 100Hz$, periodo $T_R =10ms$, in 10s vi sono N_c=1000 impulsi. Per avere funzione peso trascurabile per impulsi precedenti oltre 10s l'istante di misura occorre avere

$r^{N_C} = \exp\left(-\frac{N_c T_p}{T_{F1}}\right) \le 1/100$ cioè occorre $\frac{N_c T_p}{T_{F1}} \ge 4,6$ e quindi $T_{F1} \le \frac{N_c T_P}{4,6} = 2,17ms$

Con la costante T_{F1} = 1ms già scelta per il GI questa condizione è soddisfatta, ma il numero di campioni utilizzato è inferiore al disponibile e non si ottiene tutto il miglioramento possibile. Conviene aumentare T_{F1} rispettando la condizione: perciò per il BI scegliamo T_{F1} = 2ms e quindi C_1= 200nF.

Notiamo che il GI con costante di tempo $T_{F1} = 2ms$ rispetto al caso visto in A con $T_{F1} = 1ms$ avrebbe eguale S/N e segnale di uscita ridotto di un fattore 2. Utilizzando invece il filtro come BI l'operazione di media ha effetti quantitativi rilevanti:

aumenta il segnale di uscita del fattore $\frac{1}{1-r} \approx \frac{T_{F1}}{T_P} = 200$

aumenta il rumore di uscita del fattore $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \approx \sqrt{\frac{T_{F1}}{2T_P}} = 10$

aumenta il S/N del fattore $\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_{F1}}{T_P}} = 20$

Il miglioramento del S/N riduce <u>l'ampiezza minima di impulso misurabile</u>

$$V_{P\min,BI} = V_{P\min,G1} \frac{1-r}{\sqrt{1-r^2}} \approx \frac{V_{P\min,G1}}{20} \approx 447nV$$

<u>La tensione di segnale in uscita dal BI</u> aumenta notevolmente rispetto a quella data dal GI: con il BI essa risulta eguale al valor medio dell'impulso di ingresso nell'intervallo T_P

$$s_{BI} = s_{u1} \frac{1}{1-r} \approx \frac{V_P}{2} \frac{T_P}{T_{F1}} \frac{T_{F1}}{T_P} = \frac{V_P}{2}$$

B2 Filtro attivo

Il condensatore si scarica tutto il tempo. Pertanto da un impulso all'impulso precedente la funzione peso è più piccola del fattore

$$r = \exp\left(-\frac{T_R}{T_{F2}}\right) \approx 1 - \frac{T_R}{T_{F2}} = 1 - \frac{1}{f_R T_{F2}}$$

che ora <u>**dipende dalla frequenza di ripetizione f_R**</u>, cioè il filtro funziona da <u>RATEMETER INTEGRATOR (RI)</u>.

Per avere funzione peso trascurabile per gli impulsi precedenti oltre 10s occorre

$$\exp\left(-\frac{10s}{T_{F2}}\right) \le 1/100$$

e per questo occorre che sia $\frac{10s}{T_{F2}} \ge 4,6$ cioè $T_{F2} \le \frac{10s}{4,6} = 2,17s$.

Scegliamo quindi per il RI $T_{F2}=2s$ e quindi $C_2=2\mu F$

Notiamo che il GI con costante di tempo $T_{F1} = 2s$ rispetto al caso visto in A con $T_{F1} = 1ms$ avrebbe eguale S/N e segnale di uscita ridotto di un fattore 2000. Utilizzando invece il filtro come RI

aumenta il segnale di uscita del fattore $\frac{1}{1-r} \approx \frac{T_{F2}}{T_R} = f_R T_{F2} = 200$

aumenta il rumore di uscita del fattore $\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \approx \sqrt{\frac{T_{F2}}{2T_R}} = \sqrt{\frac{f_R T_{F2}}{2}} = 10$

aumenta il S/N del fattore $\frac{\sqrt{1-r^2}}{1-r} \approx \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_{F2}}{T_R}} = \sqrt{2 f_R T_{F2}} = 20$

Il miglioramento di S/N riduce <u>l'ampiezza minima di impulso misurabile</u> allo stesso livello del BI

$$V_{P\min,RI} = V_{P\min,G2} \frac{1-r}{\sqrt{1-r^2}} \approx \frac{V_{P\min,G2}}{20} \approx 447nV$$

La <u>tensione di segnale in uscita</u> dal RI aumenta notevolmente rispetto a quella ottenuta impiegandolo come GI, ma risulta inferiore a quella ottenuta con il BI

$$s_{RI} = s_{u2} \frac{1}{1-r} \approx \frac{V_P}{2} \frac{T_P}{T_{F2}} \frac{R_2}{R_3} \frac{T_{F2}}{T_R} = \frac{V_P}{2} \frac{T_P}{T_R} \frac{R_2}{R_3} = \frac{V_P}{2} f_R T_P \frac{R_2}{R_3}$$

Con f_R=100Hz e T_P=10μs si ha $s_{RI} = \frac{V_p}{20}$

(C) <u>Misura con impulsi ripetitivi a frequenza f_R non controllabile variabile tra 100Hz a 200Hz</u>

C1 Filtro passivo

In queste condizioni il filtro risulta ancora adatto allo scopo così come dimensionato in (B) senza che occorra alcuna modifica. Infatti:

1) Sia il S/N che l'ampiezza del segnale in uscita NON dipendono dalla frequenza f_R di ripetizione degli impulsi, ma solo dall'ampiezza V_P degli impulsi di ingresso
2) La condizione di avere funzione peso trascurabile per gli impulsi precedenti oltre 10s è ancora soddisfatta se la frequenza f_R aumenta, non occorre cambiare dimensionamento del filtro. Infatti con f_R > 100Hz il numero di impulsi in 10s cresce N_c>1000 e quindi il peso dato agli impulsi precedenti oltre 10s diminuisce ancora: $r^{N_C} = \exp\left(-\frac{N_c T_p}{T_{F1}}\right) \ll 1/100$

C2 Filtro attivo

Con frequenza di ripetizione variabile il filtro RI non è adatto allo scopo. Infatti i risultati che esso fornisce dipendono non solo dall'ampiezza V_P degli impulsi di ingresso, ma anche dalla frequenza f_R di ripetizione degli impulsi che è variabile e non controllabile. Se con ampiezza dell'impulso di ingresso V_P costante la frequenza f_R varia, la tensione di uscita del filtro varia e si ha così una informazione non corretta dell'ampiezza dell'impulso di ingresso V_P .

(D) <u>Misura con impulsi ripetitivi a frequenza f_R fissa e rumore con banda meno larga (tempo di autocorrelazione più lungo)</u>

Il rumore a banda larga limitata da un polo semplice con costante di tempo $T_{nL}=2\mu s$ ha tempo caratteristico della autocorrelazione eguale a questa costante di tempo.

Questo tempo di correlazione T_{nL} rimane molto maggiore dell'intervallo tra gli impulsi T_R= *10ms*, quindi rimangono incorrelati i contributi di rumore nelle varie acquisizioni. Rimane perciò valida l'analisi e i calcoli fatti in (B) degli effetti prodotti dalla media delle acquisizioni effettuata dai circuiti BI e RI.

Il tempo di autocorrelazione T_{nL} invece non è molto breve rispetto alla durata T_P della integrazione effettuata dal GI. Perciò il calcolo del rumore filtrato dal GI non può più essere effettuato considerando il rumore approssimativamente bianco, cioè con autocorrelazione approssimata da una funzione deltiforme. Va riveduto il calcolo del rumore considerando la effettiva forma della funzione di autocorrelazione R_{nn} del rumore e cioè esponenziale bilatera

$$R_{nn}(\tau) = \overline{n_i^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) = \frac{S_b}{2T_{nL}} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) = \frac{S_u}{4T_{nL}} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right)$$

(τ intervallo di correlazione) e non più l'approssimazione di rumore bianco $R_{nn} = S_b \delta(\tau)$

Confrontiamo l'effetto del GI sul rumore bianco e non bianco. Per semplicità consideriamo un GI a guadagno normalizzato unitario (ovvero confrontiamo i rumori filtrati riportati all'ingresso del GI) La autocorrelazione della funzione peso del filtraggio GI è triangolare

$$k_{wwG}(\tau) = \frac{1}{T_P}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_P}\right) \qquad \text{per } |\tau| < T_P \quad \text{e} \quad k_{ww}(\tau) = 0 \ \text{ per } |\tau| > T_P$$

Con rumore bianco il rumore filtrato dal GI è

$$\overline{n_{GB}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau) \cdot k_{wwG}(\tau) d\tau = S_b k_{wwG}(0) = \frac{S_b}{T_P} = \frac{S_u}{2T_P}$$

Con il rumore ad autocorrelazione finita il rumore filtrato dal GI si ottiene calcolando l'integrale

$$\overline{n_{GL}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau) \cdot k_{wwG}(\tau) d\tau = 2 \cdot \int_0^{T_P} \overline{n_i^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) \cdot \frac{1}{T_P}\left(1 - \frac{|\tau|}{T_P}\right) d\tau =$$

$$= 2 \cdot \frac{S_u}{4T_{nL}} \cdot \frac{1}{T_P} \int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_P}\right) d\tau =$$

$$= \frac{S_u}{2T_P} \int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_P}\right) \frac{d\tau}{T_{nL}}$$

Possiamo scrivere

$$\overline{n_{GL}^2} = \overline{n_{GB}^2} \cdot I \qquad \text{con} \qquad I = \int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{|\tau|}{T_{nL}}\right) \cdot \left(1 - \frac{|\tau|}{T_P}\right) \frac{d\tau}{T_{nL}}$$

Confrontando i calcoli di rumore non bianco e rumore bianco, si può in vari modi dedurre che il rumore filtrato risulta minore per il caso di rumore non bianco.

Ad esempio notando che R_{nn} ha la stessa area nei due casi (eguale alla densità spettrale S_b) si deduce che l'integrale è maggiore se R_{nn} è concentrata dove è massima k_{wwG}., cioè nel caso di rumore bianco.

Si può anche notare che l'integrale I evidenziato è minore dell'unità $I<1$ confrontandolo con l'integrale della sola funzione esponenziale tra 0 e ∞, che è unitario.

Valutazioni quantitative approssimate che confermano la conclusione detta si possono fare anche considerando il calcolo del rumore filtrato nel dominio della frequenza (lo spettro del rumore a banda larga finita è meno esteso di quello del rumore bianco).

Per avere una valutazione quantitativa completa eseguiamo il calcolo dell'integrale I

$$I = \int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{nL}}\right) \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T_P}\right) \frac{d\tau}{T_{nL}} = \int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{nL}}\right) \cdot \frac{d\tau}{T_{nL}} - \frac{T_{nL}}{T_P} \int_0^{T_P} \frac{\tau}{T_{nL}} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{nL}}\right) \cdot \frac{d\tau}{T_{nL}}$$

Calcoliamo prima separatamente i due integrali

$$\int_0^{T_P} \exp\left(-\frac{\tau}{T_{nL}}\right)\cdot\frac{d\tau}{T_{nL}} = 1-\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)$$

$$\int_0^{T_P} \frac{\tau}{T_{nL}}\exp\left(-\frac{\tau}{T_{nL}}\right)\cdot\frac{d\tau}{T_{nL}} = 1-\left[1+\frac{T_P}{T_{nL}}\right]\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)$$

utilizziamo quindi i risultati per ottenere I

$$I = 1-\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)-\frac{T_{nL}}{T_P}\left\{1-\left[1+\frac{T_P}{T_{nL}}\right]\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)\right\} = 1-\frac{T_{nL}}{T_P}\left(1-\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)\right)$$

In conclusione abbiamo così ricavato il rapporto tra il rumore filtrato da GI nei due casi di spettro di rumore considerati:

$\overline{n_{GL}^2}$ con rumore di ingresso con densità spettrale (bilatera) S_b costante con banda limitata

$\overline{n_{GB}^2}$ con rumore di ingresso bianco con densità spettrale (bilatera) S_b costante

$$\frac{\overline{n_{GL}^2}}{\overline{n_{GB}^2}} = 1-\frac{T_{nL}}{T_P}\left(1-\exp\left(-\frac{T_P}{T_{nL}}\right)\right)$$

Nel nostro caso con $T_P=10\mu s$ e $T_{nL}=2\mu s$ il rumore a banda larga filtrato da GI risulta ridotto del 20% rispetto al rumore bianco

$$\frac{\overline{n_{GL}^2}}{\overline{n_{GB}^2}} = 1-\frac{2}{10}\left(1-e^{-5}\right) \approx 0,8$$