

PROBLEMA 1

Quadro dei dati

$v_s = V_s \cos \omega_s t$ segnale

V_s ampiezza da misurare, lentamente variabile su tempi ≥ 1 s

$f_s = 2 \text{ kHz}$ frequenza del segnale (frequenza angolare $\omega_s = 2\pi f_s$)

$v_R = B \cos \omega_s t$ segnale di riferimento sincrono con il segnale da misurare

$f_o = f_s = 1 \text{ kHz}$ frequenza di risonanza del filtro accordato

$Q = 5$ fattore di qualità del filtro accordato a

$\sqrt{S_v} = 100 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$ densità di rumore a larga banda (unilatera)

$f_c = 500 \text{ Hz}$ frequenza d'angolo del rumore $1/f$

(A) Filtraggio con filtro risonante RLC

A1 - Parametri caratteristici

Il filtro risonante RLC è un filtro lineare a parametri costanti. Si può valutare quantitativamente la sua azione e il suo effetto tenendo conto dei parametri caratteristici

- **Frequenza di risonanza** (oscillazione propria del filtro) $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- **Smorzamento** della risposta nel tempo $\alpha_o = \frac{1}{2RC}$
- Fattore di **qualità** $Q = \frac{\omega_o}{2\alpha_o}$
- Guadagno unitario alla frequenza di risonanza f_o del blocco di filtraggio $H(f_o) = 1$ (il filtro è inserito in un apposito circuito di amplificazione)

NB: sono dati i valori di ω_o e Q , quindi è noto anche il valore di $\alpha_o = \omega_o / 2Q$

A2 - Funzione peso nel tempo

Risposta $h(t)$ all'impulso $\delta(t)$: forma oscillatoria con ampiezza smorzata esponenzialmente

$$h(t) = 1(t) A e^{-\alpha_o t} \cos \omega_o t$$

(l'espressione della ampiezza A in funzione di f_o e Q è nota, ma non è riportata qui perchè non è necessaria per i calcoli da eseguire in questo problema)

Funzione peso nel tempo $w_o(t)$ (per una misura effettuata campionando al tempo t_m l'uscita del filtro): ha la forma della risposta alla δ , ma invertita nel tempo e traslata fino a portare la sua origine all'istante di misura t_m

$$w_o(t) = h(t_m - t) = 1(t_m - t) A e^{-\alpha_o(t_m - t)} \cos \omega_o(t_m - t)$$

Spostando l'istante di campionamento t_m si sposta tutta la funzione peso, quindi si sposta la posizione dei suoi massimi rispetto a quelli del segnale sinusoidale.

A3 - Funzione di trasferimento in frequenza $H(f)$ (ovvero funzione peso in frequenza $W_o(f)$)

- La parte principale è centrata sulla frequenza di risonanza f_o e $|H(f)|^2$ è bene approssimata da un andamento a parabola.
- Alla frequenza di risonanza lo sfasamento è nullo (cioè il segnale di uscita nel tempo è allineato a quello in entrata).
- Alla frequenza di risonanza il guadagno è unitario, quindi il segnale di uscita è uguale a quello di ingresso anche in ampiezza
- la banda equivalente per valutare il valore efficace del rumore in uscita dal filtro è

$$\Delta f_{no} = \frac{\pi}{2} \frac{f_o}{Q} = 314 \text{ Hz}$$

A4 – Valutazione del rumore e minimo segnale misurabile

Indicando con S_T la totale densità spettrale di rumore (rumore bianco più rumore $1/f$)

$$S_T(f_o) = S_v + S_v \frac{f_c}{f_o} = 1,5 \cdot S_v \quad \text{cioè} \quad \sqrt{S_T(f_o)} = \sqrt{1,5} \sqrt{S_v} = 122 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$$

il valore efficace del rumore è

$$\sqrt{v_{n,o}^2} \approx \sqrt{S_T(f_o)} \cdot \sqrt{\Delta f_{n,o}} = \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{S_v} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{f_o}{Q}} \approx 2,17 \mu\text{V}$$

Dato che per segnale di ingresso a centro banda il guadagno è unitario, il rapporto S/N per una misura effettuata correttamente è

$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{V_s}{\sqrt{v_{n,o}^2}}$$

e l'ampiezza del minimo segnale misurabile (per il quale risulta S/N=1) è

$$V_{s \text{ min},o} = \sqrt{v_{n,o}^2} = 2,17 \mu\text{V}$$

A5 – Corretta esecuzione della misura dell'uscita del filtro

La misura viene eseguita campionando l'uscita del filtro a un istante t_m che va scelto razionalmente per ottenere una corretta misura dell'ampiezza V_s .

Dato che il segnale di uscita dal filtro è uguale a quello di entrata, per ottenere una corretta misura dell'ampiezza V_s l'istante t_m deve corrispondere a un massimo del segnale stesso. Per individuare agevolmente questo istante anche per segnali di piccola ampiezza, possiamo valerci del segnale di

riferimento e sincronizzare il campionamento con un massimo del riferimento (cioè effettuarlo quando la fase del riferimento è zero).

Esaminando l'azione della funzione peso si conferma la scelta di campionare l'uscita in corrispondenza a un massimo del riferimento. Infatti il pesaggio viene effettuato moltiplicando il segnale per il peso e integrando il prodotto, quindi è evidente che per ottenere il risultato più elevato (e quindi il migliore S/N) occorre che la posizione in tempo dei massimi della funzione peso coincida con quella dei massimi del segnale.

Occorre anche verificare che la misura rilevi correttamente le lente variazioni di ampiezza del segnale nel tempo. L'ampiezza del segnale varia su tempi $\approx 1s$, quindi il suo andamento è descritto nel dominio di Fourier da componenti con frequenze fino a circa 1Hz. Per un corretto rilevamento di questa forma d'onda occorre: a) usare frequenza di campionamento almeno 2Hz, cioè intervallo tra campioni $\approx 500ms$ o più breve b) evitare che nella misura di un campione vengano inclusi contributi dai campioni precedenti, quindi curare che la funzione peso di una misura scenda a livello trascurabile in un tempo più breve dell'intervallo tra i campioni, cioè bene entro $\approx 500ms$.

Sappiamo che la funzione peso si smorza esponenzialmente allontanandosi da t_m

$$1(t_m - t)e^{-\alpha_o(t_m - t)} = 1(t_m - t)e^{-(t_m - t)/T_d}$$

in cui

$$T_d = \frac{1}{\alpha_o} = \frac{2Q}{\omega_o} = \frac{Q}{\pi f_o} \approx 1,6ms$$

Dunque la funzione peso si riduce a livello trascurabile per

$$t_m - t = 5T_d \approx 8ms \quad \text{e quindi ben entro l'intervallo di } 500ms \text{ tra i campioni}$$

(B) Filtraggio con Lock-in Amplifier (LIA)

B1 - Funzione peso del LIA

Il LIA è un filtro lineare a parametri variabili nel tempo, costituito essenzialmente da uno stadio che effettua la moltiplicazione tra segnale e riferimento seguito da uno stadio di filtraggio passabasso, in questo caso un semplice filtro RC a 1 polo con costante di tempo T_F , quindi con funzione peso

$$w_F(t) = 1(t_m - t)e^{-(t_m - t)/T_F}$$

Le misure di ampiezza vengono eseguite campionando l'uscita del LIA all'istante t_m in cui si vuole rilevare una misura

Considerando la sua struttura essenziale, si vede chiaramente che il LIA ha funzione peso semplicemente data dal prodotto del riferimento per la funzione peso del passabasso

$$w_L(t) = B \cos \omega_o t \cdot w_F(t) = 1(t_m - t)e^{-(t_m - t)/T_F} B \cos \omega_o t$$

Si nota che:

a) spostando il tempo t_m di campionamento dell'uscita si sposta la funzione esponenziale, ma i massimi e minimi della funzione peso non si spostano, rimangono sincroni con il segnale di riferimento.

b) lo smorzamento è regolato dalla costante di tempo T_F .

B2 – Dimensionamento del LIA

Per effettuare con il LIA un rilevamento corretto dell'andamento della ampiezza V_s del segnale nel tempo occorre che la funzione peso di una misura scenda a livello trascurabile in un tempo più breve dell'intervallo fino alla successiva misura. Per questo occorre scegliere T_F in modo da avere sufficiente smorzamento del peso: ad esempio, per avere per ridurre il peso a 1/100 occorre avere $5T_F < 500ms$. Scegliamo $T_F = 50ms$, quindi la banda passante del filtro passabasso del LIA risulta

$$f_{Fn} = \frac{1}{4T_F} = 5Hz$$

B3 – Minimo segnale misurabile

Utilizzando il riferimento sinusoidale in fase con il segnale, il $(S/N)^2$ risulta dato dal rapporto tra la potenza ($V_s^2/2$) del segnale sinusoidale e metà della potenza di rumore (componente di rumore in fase) entro la banda $2f_{Fn}$ centrata sulla frequenza del riferimento $f_o = f_s$.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_L = \frac{V_s}{\sqrt{2S_T f_{Fn}}}$$

Il minimo segnale rivelabile è quindi

$$V_{s\min,L} = \sqrt{2S_T f_{Fn}} = 387nV$$

B4 – Corretta esecuzione della misura dell'uscita del LIA

Utilizzando il LIA non occorre sincronizzare l'istante di campionamento con il segnale di riferimento, a differenza di quanto visto per il filtro accordato. Osservando con attenzione la funzione peso, si nota infatti che spostando l'istante di misura t_m i massimi e i minimi non si spostano, rimangono sincronizzati al riferimento. Si sposta solo l'involuppo esponenziale e quindi l'uscita non subisce variazioni al variare della fase del campionamento rispetto al riferimento, segue solo le lente variazioni di ampiezza del segnale.

Abbiamo già dimensionato in B2 la costante di tempo T_F del filtro passabasso del LIA in modo che la misura effettuata campionando l'uscita a intervalli di 500ms rilevi correttamente le lente variazioni della ampiezza V_s del segnale.

B5 - Confronto con il filtro risonante

La ragione di fondo per cui non occorre sincronizzare il campionamento dell'uscita del LIA sta nel fatto che nel LIA l'azione del moltiplicatore già assicura la sincronizzazione dell'operazione di filtraggio con il riferimento.

La ragione di fondo per cui con il LIA la minima ampiezza misurabile risulta assai minore che con il filtro risonante è che con il LIA si può facilmente ottenere una banda passante assai più stretta e si può mantenerla bene centrata sul segnale, anche se il segnale varia la sua frequenza e anche se l'apparato funziona in ambiente con condizioni variabili (variazioni di temperatura, ecc.), le quali possono modificare la frequenza di risonanza del filtro accordato, ma non modificano la frequenza selezionata dal LIA che rimane fissata dal segnale di riferimento

(C) Misura di ampiezza di segnali con frequenza nota e fase NON nota

C1 - Misura con filtro risonante

Un approccio elementare è ottenere la misura per tentativi: si ripete la misura più volte variando ogni volta la posizione (rispetto al riferimento) dell'istante di campionamento dell'uscita dal filtro e si considera quella che ha dato il valore più alto. Questo procedimento ha vari difetti: è una procedura lunga e di esito un pò incerto, particolarmente se si deve operare con segnali molto piccoli e quindi con S/N modesto. Inoltre non è utilizzabile se la fase del segnale è non solo ignota, ma anche variabile nel tempo.

Un approccio più elaborato, ma più efficace, è quello di modificare l'apparato in modo da effettuare contemporaneamente due misure di ampiezza tra loro in quadratura (cioè con sfasamento $\pi/2$ tra loro) e poi sommarle quadraticamente per ottenere il modulo del segnale sinusoidale. A questo scopo si può generare dal riferimento dato un altro riferimento sfasato di $\pi/2$ e quindi le due misure si possono ottenere campionando l'uscita del filtro con due apparati di campionamento, uno sincronizzato sul primo riferimento, l'altro sul secondo.

Un approccio più semplice è utilizzare una procedura di misura asincrona di ampiezza di segnale oscillante, del genere normalmente impiegato nei voltmetri in AC per la misura di tensioni sinusoidali. Essenzialmente, l'uscita del filtro risonante viene raddrizzata da un raddrizzatore (preferibilmente a onda intera) e poi filtrata da un filtro passabasso, senza utilizzare alcun segnale di riferimento. Va notato però che questo tipo di misura si può effettuare solo su segnali non molto piccoli (cioè che assicurino un valore di $S/N \gg 1$). Un segnale piccolo che dà $S/N < 1$ non viene correttamente raddrizzato, il raddrizzamento viene pilotato dai picchi del rumore che lo accompagnano e lo sovrastano.

C2 - Misura con LIA

Anche utilizzando il LIA si può procedere alla misura per tentativi. Si effettuano varie misure variando da una all'altra la fase del riferimento e si considera quella che ha dato il valore più alto. Anche con il LIA la procedura ha i difetti e i limiti citati a proposito del filtro risonante

Anche con il LIA si possono effettuare due misure di ampiezza tra loro in quadratura e poi sommarle quadraticamente per ottenere il modulo del segnale sinusoidale. Occorre generare due riferimenti in quadratura come delineato in C1; si può quindi utilizzare due apparati LIA eguali, fornendo a uno il primo riferimento e all'altro il secondo.