PROBLEMA 1

Quadro dati e note

Segnale: impulso rettangolare, ampiezza V_P da misurare, durata T_P = 1ms;
è disponibile un impulso ausiliario sincronizzato con l'impulso rettangolare

Rumore: bianco a banda larga, con limite di banda dato da un polo semplice con costante di tempo T_h = 100ns (cioè polo a frequenza $f_h \approx$ 1,6MHz)

$\sqrt{S_{V,u}} = 40 nV/\sqrt{Hz}$ unilatera

f_s frequenza di campionamento da scegliere; $T_s = 1/f_s$ intervallo tra i campioni

Nei casi con impulsi ripetitivi (domande C e D):
- la frequenza di ripetizione è f_r = 100Hz.
- l'ampiezza degli impulsi varia lentamente e si vuole monitorarne le variazioni su tempi T_c=10s o più lunghi

(A) Filtraggio a variabili continue

(Suggerimento: consultare le slides OPF1 per spiegazioni sul filtraggio ottimo e le slides LPF2 e LPF3 su Gated Integrator e altri filtripassabasso a variabili continue ed a variabili discrete)

Con rumore bianco la funzione peso ottima ha forma eguale al segnale. Nel nostro caso è costante per tutta la durata del segnale

$$w_{op}(t) = \frac{1}{T_P} \quad \text{per } 0<t<T_P$$

Si può realizzare con un Gated Integrator (GI), per cui si ottiene

segnale $\quad s_y = V_P$

rumore $\quad \sqrt{\overline{n^2_{y,op}}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_P}}$

rapporto S/N $\quad \left(\frac{S}{N}\right)_{op} = \frac{V_P}{\sqrt{S_{V,u}}}\sqrt{2T_P}$

ampiezza minima misurabile $\quad V_{P\min,op} = \sqrt{\overline{n^2_{y,op}}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_P}} = 0,9\mu V$

(B) Filtro a variabili discrete

Suddividiamo T_P in N intervalli di tempo di durata T_s

$$N = \frac{T_P}{T_s}$$

e campioniamo al centro di ogni T_s . Per avere filtraggio che approssima il filtro ottimo occorre dare peso eguale a ciascuno dei campioni, facendo la somma dei campioni in T_P invece della integrazione del segnale continuo sull'intervallo T_P. Diamo peso 1/N a ogni campione per avere funzione peso normalizzata a 1 per la continua. Si ottiene in uscita segnale $s_y = V_P$

In un singolo campionamento il rumore è

$$\sqrt{\overline{n_x^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}} \approx 63\mu V$$

Scegliendo T_s tale che i campioni di rumore siano incorrelati, si ha in uscita del filtraggio

Rumore $$\sqrt{\overline{n_{y,s}^2}} = \frac{\sqrt{\overline{n_x^2}}}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}}$$

rapporto S/N $$\left(\frac{S}{N}\right)_s = V_P \frac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{N}$$

ovvero mettendo in evidenza la frequenza di campionamento $f_s = 1/ T_s$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = V_P \frac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{f_s T_P} = V_P \frac{\sqrt{4T_h}}{\sqrt{S_{V,u}}} \sqrt{\frac{T_P}{T_s}}$$

$$\sqrt{\overline{n_{y,s}^2}} = \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}} \sqrt{\frac{T_s}{T_p}} = \frac{1}{\sqrt{f_s T_p}} \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{4T_h}}$$

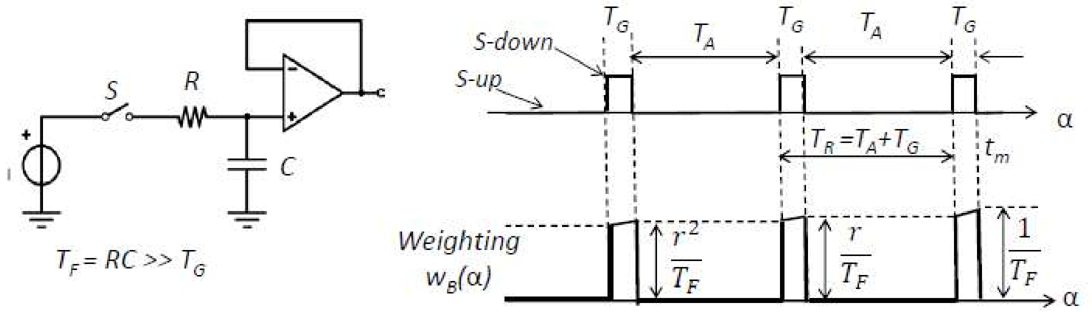
È intuitivo che al crescere della frequenza di campionamento f_s il S/N migliori, dato che si media su un numero di campioni crescente. Tuttavia la legge di incremento di S/N come $\sqrt{f_s}$ è valida solo fino a che i campioni sono incorrelati, cioè fino a che l'intervallo T_s è maggiore della larghezza che ha la funzione di autocorrelazione del rumore al livello a cui diviene trascurabile. Nel nostro caso l'autocorrelazione è esponenziale con costante T_h per cui a livello 1/100 del massimo è larga $\approx 5T_h$.

Con $T_s=5T_h$ si ha $$\sqrt{\overline{n_{y,s}^2}} \approx \frac{\sqrt{S_{V,u}}}{\sqrt{2T_p}} \sqrt{\frac{10}{4}} = 1,6\sqrt{\overline{n_{y,op}^2}} \approx 1,44\mu V$$

Dunque filtrando con campioni incorrelati il risultato è nettamente inferiore all'ottimo, che invece si raggiunge con il filtro a variabili continue. Tuttavia non siamo limitati a lavorare con campioni incorrelati: si può diminuire ancora l'intervallo di campionamento $T_s < 5T_h$ e il S/N continua a migliorare, sebbene più lentamente di $\sqrt{f_s}$ perchè la correlazione tra i campioni fa diminuire il rumore più lentamente. Il calcolo del risultato con campioni incorrelati è meno semplice, ma perfettamente fattibile. Anche senza eseguirlo però è evidente che infittendo molto i campioni il calcolo con valori discreti nel tempo approssima bene il calcolo con variabili continue. In conclusione, si può raggiungere l'ottimo anche con un filtraggio a variabili discrete se si utilizza un intervallo di campionamento nettamente più breve del tempo di autocorrelazione del rumore, ovvero una frequenza di campionamento nettamente più alta del limite di banda del rumore.

(C) <u>Filtraggio a variabili continue con impulsi ripetitivi</u>

Si può sfruttare la ridondanza dell'informazione mediando su più impulsi. Questo si può ottenere semplicemente utilizzando invece del Gated Integrator (GI) un Boxcar Integrator (BI). Il BI effettua una integrazione di ciascun impulso come il GI e quindi una media esponenziale di queste misure, media che si aggiorna via via all'arrivo di ogni impulso. Occorre però dimensionare il fattore di smorzamento esponenziale in modo che la funzione peso di ogni misura si estenda su un intervallo minore di T_c=10s, indicato come intervallo di tempo minimo in cui avvengono variazioni dell'ampiezza dell'impulso.



Boxcar Integrator

Indichiamo con

T_F la costante di tempo caratteristica del BI

T_G il tempo di integrazione del BI, in questo caso T_G=T_p=1ms

$r = \exp\{-T_G/T_F\}$ il fattore di smorzamento del peso per ogni impulso

$N_p = f_r\, T_c = 1000$ il numero di impulsi che arrivano durante T_c=10s

Per avere riduzione a < 1/100 della funzione peso per l'impulso N_p – esimo precedente la misura, occorre avere

$\exp\left(-N_p T_G/T_F\right) < 0,01$ cioè $N_p T_G/T_F > 5$ e quindi $T_F < N_p T_G/5 \approx 200ms$

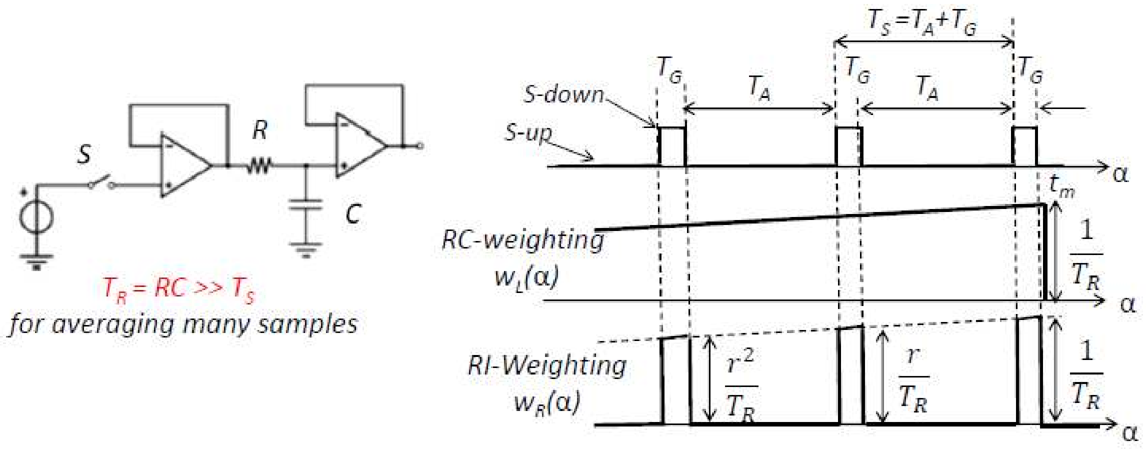
La media esponenziale migliora S/N e ampiezza minima misurabile di un fattore

$$\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \approx \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}} = \sqrt{400} = 20$$

Si ottiene quindi

$$V_{p\min,BI} = V_{p\min,GI} \Big/ \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}} = \frac{V_{p\min,GI}}{20} = 45nV$$

Dato che nel caso considerato la frequenza di ripetizione degli impulsi è costante, possiamo anche utilizzare in alternativa al BI un filtro Ratemeter Integrator (RI) per effettuare la media esponenziale con lo stesso fattore di smorzamento e ottenere lo stesso risultato.



Con il RI il dimensionamento per limitare l'estensione nel tempo della funzione peso è molto semplice. Occorre dimensionare la costante di tempo T_R del circuito RC in modo che l'esponenziale si riduca a 1/100 nell'intervallo T_c=10s, cioè occorre avere

$$\exp\left(-T_c/T_R\right)=1/100 \qquad \text{e quindi} \qquad T_R = T_c/5 = 2s$$

In conclusione vediamo che il filtraggio con media esponenziale dei campioni porta un miglioramento notevole. Notiamo però che in linea di principio si potrebbe migliorare ulteriormente effettuando una media con peso costante, che sfrutterebbe meglio gli impulsi disponibili nell'intervallo T_C, cioè converrebbe effettuare una media mobile su intervallo T_C . Tuttavia effettuare una media mobile su un intervallo di 10 secondi utilizzando solo filtri analogici non è bene realizzabile in pratica.

(C) Filtraggio a variabili discrete con impulsi ripetitivi

Con la strumentazione elettronica oggi correntemente disponibile è possibile e consigliabile in pratica acquisire digitalmente i campioni ed effettuarne quindi una elaborazione digitale. Nella elaborazione digitale la media dei campioni può essere effettuata con libertà di scelta molto maggiore rispetto al caso con elettronica analogica. È possibile realizzare una media esponenziale con lo stesso smorzamento di quella vista in B e ottenere perciò lo stesso fattore di miglioramento della misura effettuata su un singolo impulso. È anche possibile e agevole effettuare una media mobile delle misure degli N_p impulsi presenti in un intervallo T_c. Si nota che il rumore che accompagna le misure è incorrelato da un impulso all'altro e quindi effettuando la media di N_p misure si migliora S/N e ampiezza minima misurabile di un fattore

$$\sqrt{N_p} = \sqrt{1000} \approx 31,6$$

Possiamo ora riassumere e confrontare le prestazioni e la praticità di impiego dei filtri visti.

Per la misura di un singolo impulso:
- un filtro Gated Integrator è una soluzione semplice e fornisce il miglior risultato possibile, dato che realizza la funzione peso di filtraggio ottimo
- un filtro a campionamento e media di campioni è meno semplice e per raggiungere livello di prestazioni paragonabile al GI deve operare a frequenza di campionamento elevata

Per la misura di impulsi ripetitivi
- un Boxcar Integrator è una soluzione semplice, ma non sfrutta in modo completo la ridondanza di informazione disponibile
- un filtro a campionamento e media di campioni permette di sfruttare al meglio la ridondanza di informazione per migliorare la misura