## MODELLI STATISTICI PER IL RUMORE STAZIONARIO

Abbiamo più volte affermato che il rumore $n(t)$ è un fenomeno casuale e, come tale, non è rappresentabile nel dominio del tempo mediante una funzione matematica espressa in termini espliciti. A differenza di quanto accade per i segnali deterministici, la forma d'onda che descrive l'andamento nel tempo del rumore non è una grandezza significativa in quanto non può essere determinata a priori ed in quanto varia in modo imprevedibile da una osservazione all'altra del fenomeno. Per descrivere il rumore si ricorre allora, nel dominio del tempo, alla funzione di autocorrelazione (il cui valore per $\tau=0$ fornisce il valore quadratico medio del rumore) e, nel dominio delle frequenze, alla densità spettrale di potenza. Abbiamo già sottolineato che non esiste una corrispondenza biunivoca tra densità spettrali di potenza e forme d'onda nel dominio del tempo: ad una medesima densità spettrale di potenza $S(\omega)$ possono essere associati diversi segnali $x(t)$ caratterizzati da un differente andamento temporale.

Da queste considerazioni emerge la possibilità di simulare un rumore $n(t)$, avente un determinato spettro di potenza $S_n(\omega)$, con un opportuno segnale casuale $f(t)$ avente spettro di potenza $S_f(\omega)$ coincidente con lo spettro $S_n(\omega)$ del rumore considerato. Infatti, visto che l'andamento nel tempo dei segnali casuali non è fisicamente significativo, il rumore $n(t)$ ed il modello $f(t)$ risultano statisticamente equivalenti quando sono caratterizzati dallo stesso spettro di potenza oppure, se si vuole adottare una descrizione nel dominio del tempo, quando presentano la stessa funzione di autocorrelazione: il fatto che $n(t)$ e $f(t)$ si sviluppino nel tempo in modo differente è del tutto inessenziale per quanto riguarda l'equivalenza statistica. La simulazione del rumore mediante opportuni modelli statistici è spesso di grande utilità pratica; essa può essere realizzata fisicamente, creando con adatti circuiti un segnale $f(t)$ avente le caratteristiche spettrali volute, oppure può essere effettuata per mezzo di un calcolatore. Esistono vari modelli statistici atti a simulare un rumore $n(t)$ avente densità spettrale di potenza $S_n(\omega)$ nota. Illustreremo qui di seguito i modelli più semplici e più comunemente utilizzati, limitandoci al caso in cui il rumore da simulare sia di tipo stazionario.

Il primo modello statistico che consideriamo è costituito da un processo casuale i cui segnali campione $f(t)$ sono la sovrapposizione casuale di forme d'onda sinusoidali $A\cos(\omega t+\Theta)$ statisticamente indipendenti l'una dall'altra. Le componenti sinusoidali hanno tutte la stessa ampiezza $A$; la fase $\Theta$ delle sinusoidi è una variabile statistica uniformemente distribuita nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 2\pi$: essa è caratterizzata da una densità di probabilità $p(\Theta)=$ costante; la frequenza $\omega$ è una variabile statistica caratterizzata da una opportuna densità di probabilità $p(\omega)$, normalizzata all'unità, funzione reale e pari di $\omega$: $p(\omega)=p(-\omega)$. Si suppone che $p(\omega)$ sia indipendente dal tempo: il processo descritto dai segnali campione $f(t)$ è quindi un processo stazionario ed è pertanto adatto a simulare un rumore $n(t)$ di tipo stazionario. Ci proponiamo di ricavare le condizioni che devono essere imposte alla ampiezza $A$ delle sinusoidi ed alla densità di probabilità $p(\omega)$ se si vuole che il processo $f(t)$ sia statisticamente equivalente ad un rumore stazionario $n(t)$ caratterizzato dal valore quadratico medio $\overline{n^2}$, dalla funzione di autocorrelazione $R_{nn}(\tau)$ e dallo spettro di potenza $S_n(\omega)$. Per ipotesi la densità di probabilità relativa alle fasi $\Theta$ delle sinusoidi è costante; normalizzata all'unità, tale probabilità è $p(\Theta)=1/2\pi$; per ipotesi non vi è correlazione fra le varie frequenze $\omega$ delle sinusoidi che compongono il segnale campione $f(t)$. Sotto tali ipotesi, si può dimostrare che la funzione di autocorrelazione di $f(t)$ è:

$$R_{ff}(\tau)=\overline{f(t)\,f(t+\tau)}=\frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}p(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \qquad (2.23)$$

Notiamo che $R_{ff}(\tau)$ risulta indipendente dalla fase delle sinusoidi. $R_{ff}(\tau)$ è funzione reale e pari della variabile $\tau$; ne segue che la trasformata di Fourier di $R_{ff}(\tau)$, rappresentante lo spettro di potenza $S_f(\omega)$ del segnale $f(t)$, è funzione reale e pari di $\omega$: